

**ЭФФЕКТИВНАЯ
ПОДГОТОВКА
К ЕГЭ**

ЕГЭ

2014

МАТЕМАТИКА

СДАЕМ БЕЗ ПРОБЛЕМ!

- Задания частей В и С
- Подробные решения
- Ответы и комментарии



УДК 373.161.1:51

ББК 22.1я7

Д 69

Об авторах:

Г.В. Дорофеев — доктор физико-математических наук, профессор

Е.А. Седова — кандидат педагогических наук

С.А. Шестаков — заслуженный учитель России

С.В. Пчелинцев — доктор физико-математических наук, профессор

Дорофеев Г.В.

Д 69 ЕГЭ 2014. Математика. Сдаем без проблем! / Г.В. Дорофеев, Е.А. Седова, С.А. Шестаков, С.В. Пчелинцев. — М. : Яуза-пресс, 2013. — 288 с. — (ЕГЭ. Сдаем без проблем).

ISBN 978-5-99550-639-3

Весь материал пособия структурирован по основным темам школьного курса математики, приводятся различные алгоритмы решения задач. В разделе «Компендиум» представлена полезная информация для решений задач частей В и С экзаменационной работы.

Издание адресовано учащимся старших классов для подготовки к ЕГЭ по математике.

УДК 373.161.1:51

ББК 22.1я7

ISBN 978-5-99550-639-3

© Авторский коллектив, 2013

© Оформление. ООО «Яуза-пресс», 2013

СОДЕРЖАНИЕ

К читателю	4
РАЗДЕЛ I. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА	7
1.1. Делимость и деление с остатком.	7
1.1.1. Простые и составные числа	7
1.1.2. Свойства делимости	10
1.1.3. Деление с остатком	10
1.2. Десятичная запись натуральных чисел	13
1.2.1. Основная теорема арифметики	13
1.2.2. Делимость и остатки	14
1.2.3. Перестановки цифр	16
1.3. Применения натуральных и целых чисел	18
1.3.1. Комбинаторные рассуждения с целыми числами	18
1.3.2. Уравнения в целых числах	23
1.3.3. Текстовые задачи с целыми неизвестными: логика и алгебра.	26
РАЗДЕЛ II. ФУНКЦИИ	29
2.1. Основные понятия	29
2.1.1. Область определения и множество значений	29
2.1.2. Монотонность и ограниченность	34
2.1.3. Периодичность	36
2.2. Значения функций	39
2.2.1. Подстановки	39
2.2.2. Равенства с неизвестными функциями	41
2.3. Геометрия функций	42
2.3.1. Четность и нечетность	42
2.3.2. Симметрии	44
2.4. Применения функций	47
2.4.1. Монотонность.	47
2.4.2. Ограниченность	48
2.4.3. Периодичность	49
РАЗДЕЛ III. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ	50
РАЗДЕЛ IV. РЕШЕНИЯ И КОММЕНТАРИИ	88
РАЗДЕЛ V. КОМПЕНДИУМ	233

Раздел I. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1.1. Делимость и деление с остатком

1.1.1. Простые и составные числа

1. Доказать, что $1589^2 - 1$ — составное число.
2. Доказать, что $1589^{38} - 1$ — составное число.
3. Является ли число $648732^{38} - 3$ простым?
4. Является ли число $2964764^{38} + 55$ простым?
5. Доказать, что $1113^{11} + 3335^{33} + 5557^{55} + 7779^{77}$ является составным числом.
6. Все числа от 1 до 100 возвели в 1001 степень и сложили. Доказать, что полученная сумма является составным числом.
7. Доказать, что при натуральном n число
$$2n^2 + 4n - 31$$
не может быть равно нулю.
8. Доказать, что при натуральном n число
$$3n^2 + 5n - 31 \neq 0.$$
9. Простым или составным является число
$$28952^8 - 59867^6?$$
10. Простым или составным является число
$$21596^9 - 40957^6?$$
11. Простым или составным является число
$$87351^{18} + 73642^{27}?$$
12. Является ли число $5853^{13} - 742^{13}$ простым числом?
13. Является ли число $742^{85} - 5853^{34}$ простым числом?
14. Простым или составным числом является сумма
$$4654^{37} + 64711^{37}?$$

15. Является ли составным числом сумма

$$555^{222} + 222^{555}?$$

16. Простым или составным числом является сумма

$$64711^{2035} + 64712^{111}?$$

17. Простым или составным является число

$$49863^{11} + 82764^{22}?$$

18. Простым или составным является число

$$9243^{78} + 1736^{44}?$$

19. Простым или составным является число

$$2072301^{66} + 1272326^{22}?$$

20. Простым или составным числом является разность

$$84716^{66} - 49851^{23}?$$

21. Простым или составным числом является разность

$$49854^{36} - 59871^{17}?$$

22. Простым или составным числом является число

$$49854^{37} + 59871^{17}?$$

23. Простым или составным является число

$$1^{11} + 2^{22} + 3^{33} + 4^{44} + 5^{55} + 6^{66}?$$

24. Является ли число вида $2^{131131} - 1$ простым?

25. Доказать, что число вида $2^n - 1$ при составном n является составным.

26. Обязательно ли число вида $2^n - 1$ быть составным при простом $n > 5$?

27. Всегда ли число вида $2^{2^n} + 1$ является простым?

28. Может ли сумма квадратов целых чисел быть точным квадратом?

29. Обязана ли сумма квадратов целых чисел быть точным квадратом?

30. Доказать, что если каждое из двух целых чисел является суммой двух точных квадратов, то их произ-

ведение также является суммой двух точных квадратов.

31. Обязана ли сумма кубов двух целых чисел быть точным кубом?

32. Может ли сумма кубов двух натуральных чисел быть точным кубом?

33. Верно ли, что сумма любых двух составных чисел — составное число?

34. Верно ли, что сумма любых двух простых чисел является составным числом?

35. Верно ли, что сумма двух простых чисел является четным числом?

36. Верно ли, что сумма простого и составного числа — составное число?

37. Верно ли, что произведение любых двух натуральных чисел — составное число?

38. Сумма 10 000 натуральных чисел равна 10 001. Найти произведение этих чисел.

39. Можно ли получить число 1 000 000 сложением чисел, в записи которых используются только тройки?

40. Можно ли число 1001 записать в виде суммы двух простых натуральных чисел?

41. Сколькими способами можно записать число 101 010 101 в виде суммы двух простых чисел (суммы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются за одну)?

42. Найдется ли в натуральном ряде «отрезок» длины 1 000 000, состоящий только из составных чисел?

43. Сколько среди трех последовательных натуральных чисел может быть простых?

44. Могут ли три последовательных нечетных числа быть простыми?

45. Найти все тройки последовательных нечетных чисел, каждое из которых является простым.

1.1.2. Свойства делимости

46. Делится ли $7^{13} + 7^{14} + 7^{15}$ на 19?

47. Доказать, что если целое число делится на 5 и на 18, то оно делится на 90.

48. Верно ли, что если натуральное число делится на два других натуральных числа, то оно делится и на их произведение?

49. Верно ли, что если число a делится на 2148 и на 537, то оно делится на произведение $2\,148\,537$.

50. Верно ли, что если целое число делится на 345 и 671, то оно делится на $231\,495$?

51. Найти наименьшее общее кратное чисел 3674 и 236.

52. Доказать, что если a^2 делится на b^2 ($a, b \in \mathbb{Z}$), то a делится на b .

53. Доказать, что если a^2 делится на b^2 ($a, b \in \mathbb{Z}$), то a^3 делится на b^3 .

54. Доказать, что если a^3 делится на b^3 ($a, b \in \mathbb{Z}$), то a^2 делится на b^2 .

55. Найти натуральное число a , если известно, что из трех следующих утверждений два верны, а одно — нет:

- «Число a составное»,
- « a — делитель числа 2»,
- « a — делитель числа 41».

1.1.3. Деление с остатком

56. Имеется 900 теннисных мячей. Какое наименьшее их число нужно добавить, чтобы мячи можно было поровну распределить между 77 теннисистами?

57. Стаканчик с фруктовым десертом стоит 6 руб. 24 коп. Какое наибольшее число таких стаканчиков можно купить на 55 руб.?

58. Найти остаток от деления натурального числа на 5, если известно, что остаток от деления этого числа на 15 равен 8.

59. Остатки от деления натурального числа m на 7 и 8 равны 5. Найти остаток от деления числа m на 56.

60. Найти наименьшее натуральное число, большее 7, остатки от деления которого на 10 и 17 равны 7.

61. Существует ли натуральное число, остаток от деления которого на 12 равен 8, а остаток от деления на 8 равен 7?

62. Остатки от деления натурального числа n на 6 и 7 равны соответственно 2 и 3. Найти остаток от деления числа n на 42.

63. Остатки от деления натурального числа n на 8 и на 9 равны соответственно 5 и 6. Найти остаток от деления числа n на 72.

64. Найти наименьшее натуральное число, остатки от деления которого на 7 и 17 равны соответственно 3 и 13.

65. Остатки от деления числа k на 5 и 11 равны соответственно 3 и 8. Найти остаток от деления квадрата числа k на 55.

66. Остатки от деления числа k на 13 и 7 равны соответственно 2 и 5. Найти остаток от деления квадрата числа k на 91.

67. Может ли квадрат натурального числа при делении на 6 давать остаток 5?

68. Какой остаток дает точный квадрат при делении на 3?

69. Какие остатки может иметь точный квадрат после деления его на 4?

70. Сколько различных остатков дают точные квадраты при делении на 13?

71. Может ли точный квадрат при делении на 18 давать остаток 4?

72. Может ли точный квадрат при делении на 17 давать остаток 9?

73. Может ли точный квадрат при делении на 325 давать остаток 36?

74. Может ли точный куб при делении на 33 давать остаток 27?

75. Может ли точный куб при делении на 33 давать остаток 32?

76. Может ли точный куб при делении на 33 давать остаток 25?

77. Может ли девятая степень при делении на 444 давать остаток 443?

78. Может ли шестая степень при делении на 444 давать остаток 100?

79. Может ли пятая степень при делении на 444 давать остаток 243?

80. Может ли пятая степень при делении на 444 давать остаток 201?

81. Может ли двадцать пятая степень при делении на 444 давать остаток 1?

82. Может ли точный квадрат при делении на 89 давать остаток 32?

83. Может ли точный квадрат при делении на 39 давать остаток 10?

84. Найти натуральное число a , если известно, что из трех следующих утверждений два верны, а одно — нет:

«Число a делится на 26»,

«Остаток от деления числа a на 13 равен 7»,

« a — одно из чисел 58, 59, 60».

85. При перемножении двух натуральных чисел была допущена ошибка: цифра сотен в произведении увеличена на 2. При делении полученного произведения на меньший из множителей получилось в частном 50 и в остатке 25. Найти множители.

86. При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найти эти числа.

87. При умножении двух натуральных чисел, из которых одно на 94 больше другого, ученик ошибся, уменьшив в произведении число десятков на 4. При делении ошибочного произведения на больший из множителей он получил в частном 52, а в остатке 107. Найти меньшее из перемножаемых чисел.

1.2. Десятичная запись натуральных чисел

1.2.1. Основная теорема арифметики

88. Является ли точным квадратом число
10 000 000 000 000?

89. Является ли точным квадратом число
101 112 131 414 161 734?

90. Является ли точным квадратом число 309... 309, в котором группа цифр 309 повторяется 1309 раз?

91. Может ли быть точным кубом число, составленное только из цифр 4?

92. Может ли быть шестой степенью натурального числа число вида $2525...25$?

93. Является ли число $65\,875\,234\,834$ степенью натурального числа с показателем, большим 1?

94. Может ли быть степенью натурального числа с показателем степени, большим 1, число вида $181818...18$?

95. Является ли число $98\ 569\ 856\ 985\ 698\ 569\ 856$ степенью натурального числа с показателем, большим 1?

96. Можно ли заменить в выражении

$$П \cdot Л \cdot Ю \cdot С = М \cdot И \cdot Н \cdot У \cdot С$$

буквы цифрами, отличными от нуля, так чтобы получилось верное равенство (различным буквам должны соответствовать разные цифры)?

97. Доказать, что

$$12^{11} + 4 \cdot 12^2 + 1 \neq 743\ 008\ 370\ 111.$$

98. Доказать, что

$$\frac{11\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111}{2\ 071\ 723} \neq 5\ 363\ 222\ 353.$$

99. Доказать, что

$$99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \neq 9\ 806\ 781\ 064\ 320.$$

1.2.2. Делимость и остатки

100. При каких n верно утверждение «Натуральное число делится на n в том и только в том случае, если сумма его цифр делится на n »?

101. Число $777...7$ составлено из 2005 цифр. Найти его однозначные делители.

102. Может ли число, составленное из одинаковых цифр, делиться на все однозначные числа?

103. Существует ли число, составленное из одинаковых цифр, которое делится на все однозначные числа, кроме 5?

104. Найти все пятизначные числа вида $\overline{67m1n}$ (m и n — цифры), которые делятся на 36.

105. Является ли точным квадратом число

1 002 003 004 005 006 007?

106. Является ли точным квадратом число

1308...1308, в котором группа цифр 1308 повторяется 1308 раз?

107. Какие натуральные числа в любой степени оканчиваются на одну и ту же цифру?

108. Верно ли равенство $125^2 = 15\,675$?

109. Для устного возведения в квадрат числа с последней цифрой 5 пользуются следующим приемом: число, записанное остальными цифрами, умножают на число, большее его на 1, и к результату приписывают 25: например, $65^2 = 4225$. Почему этот прием приводит к правильному результату?

110. Является ли точным квадратом число

234 567 891 011 121 314 151 617 181 920 212 223 242 526?

111. Может ли быть точным квадратом число, составленное только из цифр 1, но не равное 1?

112. Является ли точным квадратом число 55 560 156?

113. Является ли точным квадратом число 454545...45, где группа 45 повторяется 2005 раз?

114. Может ли число 747474...74, состоящее из миллиона групп 74, быть 352-й степенью натурального числа?

115. Может ли быть число вида $2525...25$, отличное от 25, степенью натурального числа с показателем степени, большим 1?

116. Найти натуральное число a , если известно, что из трех следующих утверждений два верны, а одно — нет:

- 1) «число оканчивается цифрой 1»,
- 2) «число оканчивается цифрой 2»,
- 3) « a — одно из чисел 16 или 19».

117. Является ли число $125^2 + 377^2$ точным квадратом?

118. Является ли число $123^2 + 345^2 + 567^2$ точным квадратом?

119. Является ли число $[50\pi]^2 + [100\pi]^2$ точным квадратом?

120. Доказать, что если два числа оба не делятся на 3, то их сумма не является точным квадратом.

1.2.3. Перестановки цифр

121. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится обращенное число, т.е. записанное теми же цифрами в обратном порядке. Найти это число.

122. Если приписать к двузначному числу цифру 7 сперва слева, потом справа, то разность полученных трехзначных чисел будет равна 351. Найти это двузначное число.

123. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 27 больше первоначального. Найти это число.

124. Найти шестизначное число, начинающееся с цифры 1 и такое, что если переставить эту цифру в конец числа, то получится число, в три раза большее искомого.

125. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет меньше первоначального, а их разность равна a . При каких a задача имеет решение?

126. Разность между натуральным четырехзначным числом и обращенным числом, т.е. числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 90. Из всех таких чисел найти наибольшее, если известно, что сумма его цифр сотен и десятков принимает наименьшее возможное значение.

127. Пусть $\overline{xz}$ — натуральное число, в котором x десятков и z единиц, а $\overline{xuz}$ натуральное число, в котором x сотен, u десятков и z единиц. Доказать, что уравнение $\overline{xuz} = u \cdot \overline{xz}$ не имеет решений.

128. Пусть a и b — натуральные трехзначные числа, причем $a \neq b$. Из них составили два шестизначных числа, приписав a к b сначала справа, а затем слева. Доказать, что разность этих шестизначных чисел не делится на 2012.

129. Найти двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

130. Доказать, что ни число 28 372, ни любое число, составленное из тех же цифр, не являются точным квадратом.

131. Некоторое число при делении на 9 дает остаток 7. Какой остаток получится, если его цифры каким-то образом переставить?

132. Можно ли из цифр 1, 2, 5, 6 и 7 составить пятизначное число, так чтобы оно являлось точным квадратом?

133. Можно ли из цифр 2, 3, 5 и 8 составить четырехзначное число, так чтобы оно являлось точным квадратом?

134. Доказать, что если число делится на 11 и записывается четным числом цифр, то при перестановке любой группы его первых цифр в конец также получится число, делящееся на 11.

135. Сколько можно составить из цифр 2, 3, 4 и 5 четырехзначных чисел, делящихся на 11?

136. Десятичная запись числа a_n составлена из $n \geq 1$ «блоков» 1354. При каких n число a_n делится на 11?

137. Десятичная запись числа a_n составлена из «блоков» 541354. При каких n число a_n делится на 7?

138. Десятичная запись числа a_n составлена из «блоков» 541354. При каких n число a_n делится на 13?

1.3. Применения натуральных и целых чисел

1.3.1. Комбинаторные рассуждения с целыми числами

139. В пакеты вместимостью 2, 3 и 9 кг требуется пересыпать 107 кг сухофруктов. Какое наименьшее число пакетов потребуется для этого?

140. Можно ли из 12 чисел, в записи которых участвует только цифра 8, составить 1000?

141. Из чисел, в записи которых участвует только цифра 8, составлена сумма, равная 1000. Какое наименьшее число слагаемых потребуется для составления этой суммы?

142. Найти наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 1000.

143. Найти наибольшее четырехзначное число, сумма цифр которого равна 23.

144. Найти наименьшее четырехзначное число, сумма цифр которого равна 21.

145. Найти двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом обращенным, т.е. записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

146. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится обращенное число. Найти это число.

147. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 27 больше первоначального. Найти это число.

148. Трехзначное число оканчивается цифрой 2. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Найти это число.

149. Сумма всех трехзначных чисел, составленных из трех различных, отличных от нуля, цифр k , l и m , больше 2700, но не превосходит 2900. Каждая из указанных цифр встречается в записи числа один раз. Найти число klm , если известно, что оно четное и наибольшее из всех трехзначных чисел, удовлетворяющих задаче.

150. Найти два двузначных числа, обладающих свойством: если к большему искомому числу приписать справа нуль и за ним меньшее число, а к меньшему числу приписать справа большее число и затем нуль, то из образовавшихся таким образом двух пятизначных чисел первое, будучи разделено на второе, дает в частном два и в остатке 590. Кроме того, известно, что сумма, составленная из удвоенного большего искомого числа и утроенного меньшего, равна 72.

151. Разность между натуральным четырехзначным числом и обращенным к нему, т.е. числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 90. Из всех таких чисел найти наибольшее, если известно, что сумма его цифр сотен и десятков принимает наименьшее возможное значение.

152. Доказать, что число $A = 19202122...80$ (выписываются подряд двузначные числа от 19 до 80) делится на 1980.

153. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 в остатке 5. Найти это число.

154. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8, а в остатке 1. Если

число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность между цифрами десятков и единиц исходного числа, то в частном получится 4, а в остатке 2. Найти это число.

155. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 8. Если же число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность между цифрами десятков и единиц исходного числа, то в частном получится 15, а в остатке 2. Найти это число.

156. Найти четырехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13; сумма квадратов средних цифр равна 85; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, что и искомое, но в обратном порядке.

157. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получилось 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получилось 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

158. После деления двузначного числа на произведение его цифр в частном получилось 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

159. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получилось 7 и в остатке 6. Найти это число.

160. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает свойствами: первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр, разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, отрицательна и делится на 81 без остатка.

161. Грузовики для перевозки партии из 323 телевизоров должны быть загружены до отказа. Если коробки с телевизорами уложить так, чтобы в каждом грузовике поместилось на 2 коробки больше, то грузовиков понадобится на 2 меньше. Сколько грузовиков понадобится?

162. Все цифры трехзначного числа отличны от 0, и сумма их квадратов равна 45. Если от этого числа отнять 198, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

163. Найти такое двузначное число, в котором число его единиц на два больше числа десятков, а произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

164. Число десятков некоторого двузначного числа на единицу больше числа единиц. Произведение этого числа на число, образованное перестановкой цифр, равно 2430. Найти данное число.

165. Дано двузначное натуральное число, у которого число десятков на единицу больше числа единиц, а произведение его цифр на 45 больше утроенного числа его десятков. Найти это число.

166. Найти двузначное натуральное число, у которого число десятков на два больше числа единиц, если при делении этого числа на произведение его цифр в частном получается 2, а в остатке 16.

167. Какое трехзначное число равно кубу цифры его единиц, а также квадрату числа, составленного из его второй и первой цифр?

168. Если от задуманного трехзначного числа отнять 7, то получившееся число разделится на 7, если прибавить 8 — то результат разделится на 8. Если же прибавить 9, то результат разделится на 17. Найти задуманное число.

169. Человеку, родившемуся в двадцатом веке, в 1996 году исполнилось столько лет, какова сумма двух последних цифр года его рождения. В каком году он родился?

170. Разность цифр двузначного натурального числа равна 4, а сумма квадратов цифр этого числа больше произведения его цифр на 37. Найти число.

171. Определить трехзначное число, если его цифры составляют арифметическую прогрессию, при делении этого числа на сумму его цифр в частном получается 48, а разность данного числа и числа 198 есть число, цифры которого те же, но записанные в обратном порядке.

172. К двузначному числу приписали слева еще одну цифру и поменяли местами цифры единиц и десятков. Первоначальное двузначное умножили на полученное трехзначное число и произведение оказалось равным 10 001. Найти двузначное число.

173. При умножении трехзначного числа на двузначное, образованное из этого трехзначного зачеркиванием первой слева цифры и перестановкой оставшихся двух, получили 3003. Найти трехзначное число.

174. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 11?

175. Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся нацело на 15, у которых сумма квадратов цифр не превосходит 26?

176. Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся нацело на 45, у которых сумма квадратов цифр не превосходит 35?

177. Определить сумму всех таких натуральных чисел n , для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и $n + 8$ одновременно.

178. Определить сумму всех таких натуральных чисел n , для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и $n + 7$ соответственно.

1.3.2. Уравнения в целых числах

179. Решить в натуральных числах уравнение

$$(x - 2y)(2x - 1 + y) = 11.$$

180. Решить в натуральных числах уравнение

$$(11x + 6y - 8)(6x + 8y - 1) = 100.$$

181. Решить в натуральных числах уравнение

$$(3x + 5y - 7)(5x + 4y + 11) = 20.$$

182. Решить в натуральных числах уравнение

$$(51 - 4x - 7y)(31x + 2y - 6) = 68.$$

183. Решить в натуральных числах уравнение

$$(13x + 3y - 2)(2x - 8y - 13) = 11.$$

184. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 = y^2 + 2y + 8.$$

185. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 3.$$

186. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 - 4xy - 5y^2 = 7.$$

187. Решить в целых числах уравнение

$$2x^2 + xy - 6y^2 + 3 = 0.$$

188. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

189. Решить в целых числах уравнение

$$7x^2 + 12xy - 4y^2 = 21.$$

190. Решить в целых числах уравнение

$$7x^2 + 12xy - 8y^2 = 21.$$

191. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 = 0.$$

192. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 2y + 5 = 0.$$

193. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0.$$

194. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0.$$

195. Решить в натуральных числах уравнение

$$3x - xy - 2y = 6.$$

196. Решить в целых числах уравнение

$$2x + 3xy - 2y = 13.$$

197. Решить в целых числах уравнение

$$7x - 3xy + 6y - 5 = 0.$$

198. Решить в целых числах уравнение

$$11xy = 5x + 5y + 1.$$

199. Решить в целых числах уравнение

$$7x - 13xy + 7y - 5 = 0.$$

200. Решить в целых числах уравнение

$$y^3 - 3xy + 3x = 0.$$

201. Решить в целых числах уравнение

$$x^3 - 9xy + 3y^3 = 0.$$

202. Решить в натуральных числах уравнение

$$3x^4 + 5x^3y - 8 = 0.$$

203. Решить в целых числах уравнение

$$2x^2 - 6xy + y^2 + 3y = 21.$$

204. Найти все целые числа x и y , удовлетворяющие равенству $8x = 14y - 7$.

205. Решить уравнение в целых числах $13x = 6y - 19$.

206. Найти все целые числа x и y , удовлетворяющие равенству $8x = 21y - 7$.

207. Найти все целые числа x и y , удовлетворяющие равенству $25x + 46y = 1$.

208. Найти целые числа x и y , если известно, что из следующих утверждений верны только два:

$$2x + 7y = 115, 7x + 2y = 115, 8x + 3y = 140.$$

209. Найти общие члены арифметических прогрессий 1, 5, 9, ... и 6, 13, 20,

210. Сколько чисел входят в обе арифметические прогрессии 3, 7, 11, ..., 887 и 2, 9, 16, ..., 492?

211. Сколько чисел входят в обе арифметические прогрессии 1, 5, 9, ..., 885 и 5, 12, 19, ..., 502?

212. Найти натуральные числа a и b , если известно, что из следующих четырех утверждений три истинны, а одно — ложно:

$$\frac{a}{3b} \in \mathbb{Z}, \quad \frac{3b}{a} \in \mathbb{Z}, \quad a + b = 222, \quad 9a + 13b = 2000.$$

213. Найти все пары (x, y) целых чисел x и y , для которых $(3x + 2y)^2 + (x - y)^2 = 5$.

214. Найти все пары (x, y) целых чисел x и y , для которых $(3x - 2y)^2 + (x - y)^2 = 6$.

215. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

216. После деления двузначного числа на произведение его цифр в частном получилось 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

217. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получилось 7 и в остатке 6. Найти это число.

218. Остатки от деления натурального числа n на 6 и 7 равны соответственно 2 и 3. Найти остаток от деления числа n на 42.

219. Остатки от деления числа k на 13 и 7 равны соответственно 2 и 5. Найти остаток от деления квадрата числа k на 91.

1.3.3. Текстовые задачи с целыми неизвестными: логика и алгебра

220. Сын младше отца в 7 раз, а через год он станет младше отца в 6 раз. Через сколько лет сын станет младше отца в 4 раза?

221. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.

222. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает свойствами: первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр, разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, отрицательна и делится на 81 без остатка.

223. Сумму всех четных двузначных чисел разделили на одно из них. Остатка не было. Получившееся частное только порядком цифр отличается от делителя, а сумма его цифр равна 9. Какое двузначное число было делителем?

224. Сумму всех четных двузначных чисел разделили на одно из них, кратное девяти. Остатка не было. Получившееся частное отличается от делителя только

порядком цифр. Какое двузначное число являлось делителем?

225. Группа из 30 студентов получила на экзамене оценки 2, 3, 4, 5, причем общая сумма баллов равнялась 93; троек было больше, чем пятерок, и меньше, чем четверок; число четверок делилось на 10; число пятерок было четным. Сколько пятерок было получено?

226. В течение года пенсия индексировалась два раза, причем процент повышения во второй раз был в 2 раза больше, чем в первый раз. На сколько процентов она повышалась каждый раз, если до первого повышения она была равна 1800 руб., а после второго составила 2376 руб.?

227. На антикварное собрание книг стоимостью 350 000 батов дважды снижали цену на одно и то же число процентов, после чего оно стало стоить 283500 батов. На какое число процентов каждый раз снижали цену?

228. Сумма в 53 лура составлена из монет в 3 и 5 луров, а если заменить первые монеты вторыми, а вторые первыми, то она уменьшится, но не более чем в 1,5 раза. Сколько было монет в 3 лура?

229. Имеются путевки трех типов, которые стоят соответственно 4, 6 и 9 неразменных батов. Путевка первого типа рассчитана на 8 дней, второго — на 14, и третьего — на 20 дней отдыха. Сколько путевок каждого типа можно купить за 100 батов, чтобы общее число дней было наибольшим?

230. Первый умелец за 1 час изготавливает 5 игрушек, второй — 8. Они начали работу одновременно, а третий присоединился к ним через полчаса и через некоторое время догнал по количеству изготовленных игрушек первого, а через полтора часа после этого — второго умельца. Сколько игрушек за 1 час изготавливает третий умелец?

231. Число двухкомнатных квартир в доме в 4 раза больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить в 5 раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

232. На факультет от выпускников лицеев подано на 600 заявлений больше, чем от выпускников гимназий. Девушек среди выпускников лицеев в 5 раз больше, чем девушек среди выпускников гимназий, а юношей среди выпускников лицеев больше, чем юношей среди выпускников гимназий, в n раз, причем $6 \leq n \leq 12$ (n — целое число). Определить общее количество заявлений, если среди выпускников гимназий юношей на 20 больше, чем девушек.

233. Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число абитуриентов, экзаменовавшихся каждый день в каждой из аудиторий, было равным числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за 2 дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найти минимально возможное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменовано при этих условиях.

234. В конференции принимает участие 77 человек. Может ли каждый из них быть знаком ровно с семью другими?

235. Сыну 2 года, а отцу 28 лет. Сколько еще раз в течение их жизни сын будет младше отца в целое число раз, если отец проживет ровно 100 лет?