

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет
Российская академия наук
Сибирское отделение
Институт вычислительного моделирования

В. К. Андреев, Н. Л. Собачкина

**ДВИЖЕНИЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ
В ПЛОСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБЛАСТЯХ**

Монография

Красноярск
СФУ
2012

УДК 536.2:532/533

ББК 22.365.5

А65

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физико-математических наук, профессор *В. М. Белолитецкий*

доктор физико-математических наук, профессор *С. В. Хабиров*

Андреев, В. К.

А 65 Движение бинарной смеси в плоских и цилиндрических областях: монография / В. К. Андреев, Н. Л. Собачкина. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. 188 с.

ISBN 978-5-7638-2372-1

В монографии представлены результаты исследований конкретных нестационарных движений бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии, возникающих в достаточно длинных плоских и цилиндрических слоях. Рассмотрены свойства инвариантных решений уравнений термодиффузии, когда на границе раздела двух смесей поверхностное натяжение линейно зависит от температуры и концентрации. Для возникающих сопряженных начально-краевых задач получены априорные оценки всех полей, показывающие их экспоненциальную сходимость с ростом времени к стационарным значениям. Приведены результаты численных расчетов поведения скоростей, температур и концентраций в слоях. Дано обобщение решений Остроумова – Бириха на движение смесей в цилиндрической трубе.

Результаты монографии будут полезны научным работникам, преподавателям, студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам вузов, занимающимся конвективными течениями.

УДК 536.2:532/533

ББК 22.365.5

ISBN 978-5-7638-2372-1

© В. К. Андреев,
Н. Л. Собачкина, 2012

© Сибирский
федеральный
университет, 2012

Оглавление

Введение	5
Глава 1	
Однонаправленные двухслойные движения смесей в плоских и цилиндрических слоях	12
1.1. Постановка задачи о движении двух бинарных смесей с поверхностью раздела	12
1.2. Совместное однонаправленное движение бинарных смесей в плоских слоях при заданном перепаде давления	20
1.3. Движение смесей под действием термоконцентрационных сил	47
1.4. Совместное однонаправленное движение вязкой теплопроводной жидкости и бинарной смеси в трубе под действием перепада давления	68
1.5. Термоконцентрационное движение вязкой теплопроводной жидкости и бинарной смеси в трубе .	103
Глава 2	
Влияние эффекта Соре на движение смесей со свободной границей	117
2.1. Движение плоского слоя жидкости с двумя свободными границами под действием эффекта Соре	117
2.2. Движение плоского слоя жидкости со свободной границей и твердой стенкой	134
2.3. Движение бинарной смеси с цилиндрической свободной границей	140
Глава 3	
Движение бинарной смеси в горизонтальной цилиндрической трубе	158
3.1. Основные уравнения и граничные условия	158
3.2. Стационарные ползущие движения	162

3.3. Нестационарные ползущие движения	164
3.4. Решение стационарной задачи в первом прибли- жении	172
Библиографический список	180

Введение

Среди множества моделей, используемых в механике жидких сред, можно выделить так называемые *классические модели*, к которым относятся уравнения газовой динамики, Эйлера идеальной жидкости, Навье – Стокса вязкой жидкости, Обербека – Буссинеска конвективных течений. В последнее время в связи с появлением новых задач, развитием математического аппарата и средств вычислительной техники возрос интерес к *неклассическим моделям гидродинамики*. В качестве примера можно привести модели вязкого теплопроводного газа [1], микроконвекции [2], а также конвекции с учетом эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности [3, 4]. Такие усложненные модели с большей точностью (по сравнению с классическими) описывают реальные физические процессы и активно используются в вычислительной гидродинамике. В связи с этим является актуальной задача качественного исследования уравнений подмоделей усложненных сред. В частности, точные решения всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Эти решения часто используют в качестве “тестовых задач” для проверки корректности и оценки точности различных асимптотических, приближенных и численных методов.

Изучению моделей микроконвекции и вязкого теплопроводного газа с помощью теоретико-групповых методов посвящена монография [5]. Отметим также монографию [6], в которой наряду с классическими моделями исследуются уравнения термокапиллярного движения, пограничного слоя Марангони, а также уравнения конвекции с коэффициентами переноса, зависящими от температуры.

В данной книге рассматриваются конкретные подмодели движения бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии. Эти подмодели возникают при движении смесей в достаточно длинных плоских или цилиндрических слоях. По классификации группового анализа они являются инвариантными или частично инвариантными решениями общих уравнений термодиффузии. Соответствующие системы уравнений хотя и содержат меньшее число зависимых и независимых переменных, однако начально-краевые задачи для них являются очень трудными для исследования.

Термодиффузией называют молекулярный перенос вещества, связанный с наличием в среде (жидком растворе или газовой смеси) градиента температуры. При термодиффузии концентрация компонентов в областях повышенной и пониженной температуры различна. Наличие градиента концентрации приводит к возникновению обыкновенной диффузии. Стационарное состояние устанавливается тогда, когда процессы диффузии и термодиффузии уравниваются друг друга (т. е. процесс перемешивания компонентов смеси компенсируется процессом их разделения). На практике часто встречается нормальная термодиффузия, при которой тяжелые компоненты стремятся перейти в более холодные области, а легкие компоненты — в более нагретые области. В отдельных случаях наблюдается аномальная термодиффузия, когда направление движения компонентов меняется на противоположное. Термодиффузию в растворах также называют *эффектом Соре*.

Термодиффузия часто встречается в природе, а также имеет множество приложений в технике. В сочетании с тепловой конвекцией этот эффект используется для разделения изотопов в жидких и газовых смесях [7, 8]. Термодиффузия используется для определения состава нефти и разделения ее компонентов [9], нанесения различных покрытий на изделия из металлов

и играет важную роль в процессе выращивания кристаллов. Еще один пример практического применения рассматриваемого эффекта дает тепловой насос [10]. Термодиффузия также влияет на течения в морях и океанах, где массы соленой воды подвергаются различным режимам нагрева [11, 12]. Роль эффекта Соре важна и при переносе вещества через клеточные мембраны [13].

Основу модели термодиффузии бинарной смеси составляет система уравнений Навье–Стокса, дополненная уравнениями тепло- и массопереноса (вывод уравнений см., например, в работах [14, 15]). Часто используется приближение Обербека–Буссинеска, предназначенное для описания конвективных течений в естественных земных условиях. Предполагается, что плотность смеси линейно зависит от температуры и концентрации легкого компонента:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_1 T - \beta_2 C). \quad (0.1)$$

Здесь ρ_0 — плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации, а через T и C обозначены малые отклонения от средних значений; β_1 — коэффициент теплового расширения смеси; β_2 — концентрационный коэффициент плотности ($\beta_2 > 0$, поскольку C — концентрация легкого компонента).

Движение смеси описывается системой уравнений [3, 4]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}(\beta_1 T + \beta_2 C), \\ T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \chi \nabla^2 T, \\ C_t + \mathbf{u} \cdot \nabla C &= D \nabla^2 C + \alpha D \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (0.2)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости; p — отклонение давления от гидростатического; ν — коэффициент кинематической вязкости; $\mathbf{g}$ —

вектор ускорения свободного падения; χ — коэффициент температуропроводности; D — коэффициент диффузии; α — параметр термодиффузии. Все характеристики среды предполагаются постоянными и соответствуют средним значениям температуры и концентрации. Параметр термодиффузии имеет вид $\alpha = -D_T/T_0 D$, где D_T — коэффициент термодиффузии; T_0 — средняя температура. Нормальной термодиффузии соответствуют значения $\alpha < 0$, а для аномальной термодиффузии $\alpha > 0$.

При выводе системы (0.2) предполагается [16], что диффузионный поток компонента смеси равен

$$\mathbf{i} = -\rho_0(D\nabla C + D_T\nabla T).$$

В чистой жидкости эффекта Соре нет, поэтому коэффициент D_T должен обращаться в ноль при $C = 0$ и $C = 1$. Поскольку для малых отклонений температур и концентраций от равновесных значений T_0 и C_0 все коэффициенты переноса можно считать постоянными, то часто используется соотношение $D_T = C_0(1 - C_0)D'_T$, причем D'_T также называется коэффициентом термодиффузии [16].

В частном случае ($C = 0$, $\alpha = 0$) система (0.2) переходит в систему уравнений свободной конвекции однородной жидкости (модель Обербека – Буссинеска). Для данной модели известно достаточно много точных решений, значительная часть которых приведена в монографиях [3, 17]; они являются стационарными, т. е. не зависят от времени. Эти работы посвящены исследованию устойчивости различных типов конвективных течений, а также механического равновесия. Групповые свойства уравнений свободной конвекции в плоском случае изучались в статье [18], а для стационарных плоских течений — в более ранней работе [19] (см. также монографию [5]). В указанных работах построен ряд точных решений, часть из которых была найдена ранее другими методами.

Точные решения уравнений конвекции бинарной смеси рассматривались в работах [20, 21], посвященных в основном изучению устойчивости соответствующих движений. Результаты исследования устойчивости механического равновесия бинарной смеси с учетом термодиффузии можно найти в монографии [3]. Устойчивость термодиффузионного движения в вертикальном слое при наличии поперечной разности температур изучалась в работе [22], а при наличии еще и продольного градиента концентрации — в работе [23]. Отметим также работу [24], посвященную исследованию устойчивости горизонтального слоя при наличии вибрации и с учетом термодиффузии.

В указанных выше публикациях были найдены точные решения уравнений (0.1), описывающие *стационарное основное течение*. Методы группового анализа дифференциальных уравнений при этом не использовались. Однако все эти решения имеют групповую природу [5]. Групповые свойства системы (0.1) в случае $\mathbf{g} = 0$ рассмотрены в работе [25]; там же отмечена важность изучения *нестационарных движений* смесей.

Приведем краткое изложение материала книги.

В гл. 1, 2 рассмотрены конкретные нестационарные движения бинарных смесей при наличии поверхности раздела или свободной границы.

В гл. 1 исследованы свойства инвариантного решения уравнений термодиффузии в плоском слое, когда на границе раздела двух смесей поверхностное натяжение линейно зависит от температуры и концентрации. Для возникающей сопряженной начально-краевой задачи получены априорные оценки возмущений поля скоростей и температур, показывающие их экспоненциальную сходимость с ростом времени к стационарным значениям. Возмущения концентрации также выходят на стационарный режим — это доказывается с помощью преобразования Лапласа.

Изучено инвариантное решение задачи о совместном движении вязкой теплопроводной жидкости и бинарной смеси в цилиндрической трубе, которое происходит под действием нестационарного перепада давления или термоконцентрационных сил на границе раздела. Жидкие среды не смешиваются и имеют общую поверхность раздела. Задача сводится к сопряженной начально-краевой задаче для параболических уравнений. Получены априорные оценки возмущений скоростей, температур и концентраций. Найдено стационарное состояние системы и доказано, что если градиент давления в одной из жидкостей достаточно быстро со временем стремится к нулю, то возмущения всех величин также стремятся к нулю. Если градиент давления имеет ненулевой предел при $t \rightarrow \infty$, то решение выходит на стационарный режим. Поля скоростей в пределе будут такими же, как у сопряженного течения Пуазейля, а температура и концентрация представляются полиномом четвертого порядка по радиальной координате.

В гл. 2 рассмотрены плоские и осесимметрические нестационарные движения бинарной смеси вблизи точек локального нагрева свободной границы в случае, когда поверхностное натяжение есть линейная функция температуры и концентрации. Эти движения описываются частично инвариантными решениями уравнений термодиффузии. Соответствующие им системы уравнений хотя и содержат меньшее число зависимых и независимых переменных, однако начально-краевые задачи для них очень трудны для исследования. Здесь только отметим, что свободная поверхность сама является искомым элементом задачи.

Специальным преобразованием координат задачи сведены к задачам уже в фиксированной области. Получены некоторые точные частные решения, являющиеся “тестовыми” для численного решения на основе тау-метода (модификация метода Галёркина) общих нелинейных задач. В плоских задачах та-

кие решения строятся в виде рядов по полиномам Лежандра, а в осесимметрических — по смещенным полиномам Якоби. Дан анализ влияния внешнего потока тепла и эффекта Соре на положение свободных границ.

В гл. 3 получены решения стационарной и нестационарной задачи о ползущем движении бинарной смеси в горизонтальной цилиндрической трубе. Показано, что нестационарное решение выходит на стационарный режим при $t \rightarrow \infty$. Найдены решения стационарной задачи при достаточно малых числа Рейнольдса в первом приближении.

Материалы монографии использовались при чтении лекций для студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов Института математики Сибирского федерального университета.

Главы 1, 2 написаны В. К. Андреевым, гл. 3 — Н. Л. Собачкиной.

Авторы выражают искреннюю благодарность Н. Ф. Ильиной за большую работу при подготовке рукописи к изданию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11–01–00283) и СО РАН (интеграционный проект № 116).

Глава 1

Однонаправленные двухслойные движения смесей в плоских и цилиндрических слоях

Хорошо известно, что определение поля скорости при однонаправленном движении вязкой жидкости в слое или круглой трубе сводится к решению линейной начально-краевой задачи для параболического уравнения [1, 2]. При этом решение находится в виде конечных формул (например стационарное течение Пуазейля) либо в виде рядов. В данной главе изучаются аналогичные движения с границей раздела двух бинарных смесей в слое, а также вязкой жидкости и бинарной смеси в трубе. Если движение происходит только под действием термоконцентрационных сил на границе раздела, то эти задачи моделируют тепловой насос, что очень важно в условиях невесомости или микроканалах.

Результаты этой главы основаны на работах [3]–[12].

1.1. Постановка задачи о движении двух бинарных смесей с поверхностью раздела

Рассмотрим движение двух несмешивающихся несжимаемых бинарных смесей с общей границей раздела. Обозначим через Ω_j ($j = 1, 2$) области, занятые жидкостями с поверхностью раздела Γ , $\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t)$, $p_j(\mathbf{x}, t)$ — соответственно, вектор скорости и давление, $T_j(\mathbf{x}, t)$ и $C_j(\mathbf{x}, t)$ — отклонения от средних значений температуры и концентрации. Тогда система уравнений термодиффузионного движения *в отсутствие внешних сил* имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} + \frac{1}{\rho_j} \nabla p_j &= \nu_j \nabla^2 \mathbf{u}_j, \quad \frac{dT_j}{dt} = \chi_j \nabla^2 T_j, \\ \frac{dC_j}{dt} &= D_j \nabla^2 C_j + \alpha_j D_j \nabla^2 T_j, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

где ρ_j — средняя плотность; ν_j — кинематическая вязкость; χ_j — температуропроводность; D_j — коэффициент диффузии; α_j — коэффициент Соре, $\alpha_j \equiv D_{T_j}/D_j$; $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$.

Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения σ на границе раздела зависит от температуры и концентрации $\sigma = \sigma(T, C)$, причем для многих смесей он хорошо аппроксимируется линейной зависимостью

$$\sigma(T, C) = \sigma_0 - \alpha_1(T - T_0) - \alpha_2(C - C_0), \quad (1.1.2)$$

где α_1 — температурный коэффициент, $\alpha_1 > 0$; α_2 — концентрационный коэффициент (обычно $\alpha_2 < 0$, поскольку поверхностное натяжение, как правило, увеличивается с ростом концентрации); T_0, C_0 — некоторые постоянные средние значения. Сформулируем условия на поверхности раздела Γ [13]:

равенство скоростей:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{x} \in \Gamma; \quad (1.1.3)$$

кинематическое условие:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = V_n, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (1.1.4)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности Γ , направленный из Ω_1 в Ω_2 ; V_n — скорость перемещения поверхности в направлении нормали; $\mathbf{u}$ — значение вектора скорости обеих жидкостей на Γ , попарно совпадающих в силу (1.1.3);

динамическое условие:

$$(P_2 - P_1)\mathbf{n} = 2\sigma H\mathbf{n} + \nabla_\Gamma \sigma, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.1.5)$$

оно означает равенство всех сил, действующих на поверхность; P_j — тензоры напряжений, $P_j = -p_j E + 2\rho_j \nu_j D(\mathbf{u}_j)$; D — тензор скоростей деформаций; H — средняя кривизна поверхности Γ ; ∇_Γ — поверхностный градиент, $\nabla_\Gamma = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}$;

условие непрерывности температур и условия баланса кон-

центраций на границе раздела:

$$T_1 = T_2, \quad C_1 = \lambda C_2, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.1.6)$$

λ — постоянная равновесия Генри.

Кроме того, на поверхности раздела (в работе [13] приведены более общие условия, учитывающие поток энергии, затрачиваемой на деформацию Γ)

$$k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} - k_1 \frac{\partial T_2}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (1.1.7)$$

Соотношение (1.1.7) представляет собой равенство потоков тепла на границе раздела. Постоянные k_j — коэффициенты теплопроводности.

Еще одно условие — равенство потоков вещества через границу раздела:

$$D_2 \left(\frac{\partial C_2}{\partial n} + \alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \right) = D_1 \left(\frac{\partial C_1}{\partial n} + \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (1.1.8)$$

Области Ω_1 и Ω_2 могут контактировать не только друг с другом но и с твердыми стенками. Обозначим стенки через Σ_j , на них ставится условие прилипания:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{a}_j(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_j, \quad (1.1.9)$$

где $\mathbf{a}_j(\mathbf{x}, t)$ — скорость движения стенки Σ_j . Кроме того, будем считать, что температура в точках Σ_j задана

$$T_j = T_{\text{ст}}^j(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_j. \quad (1.1.10)$$

Далее, отсутствует поток вещества через твердые поверхности Σ_j :

$$\frac{\partial C_j}{\partial n} + \alpha_j \frac{\partial T_j}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_j. \quad (1.1.11)$$

Для полной постановки задачи к соотношениям (1.1.1)–

(1.1.6) следует добавить начальные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_{0j}(\mathbf{x}), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_{0j} = 0, \quad T_j(\mathbf{x}, 0) = T_{0j}(\mathbf{x}), \\ C_j(\mathbf{x}, 0) = C_{0j}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

З а м е ч а н и е 1. Постановку начально-краевой задачи, когда на Γ имеется растворимое поверхностно-активное вещество, см. в работе [13].

Можно показать [14], что система (1.1.1), описывающая плоские движения, допускает однопараметрическую подгруппу, соответствующую оператору

$$\frac{\partial}{\partial x} + A_j \frac{\partial}{\partial T_j} + B_j \frac{\partial}{\partial c_j} - \rho_j f_j(t) \frac{\partial}{\partial p_j},$$

где A_j, B_j — постоянные; $f_j(t)$ — функции времени. Инвариантное решение следует искать в виде

$$\begin{aligned} u_j = u_j(y, t), \quad v_j = v_j(y, t), \quad p_j = -\rho_j f_j(t)x + P_j(y, t), \\ T_j = A_j x + T'_j(y, t), \quad C_j = B_j x + K_j(y, t). \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

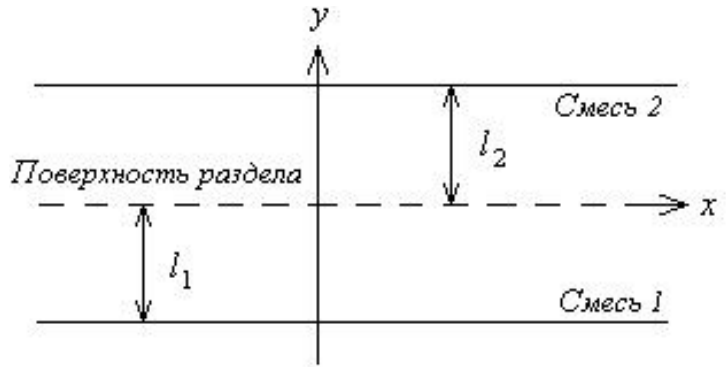
Из уравнения сохранения массы следует, что v_j зависит только от времени: $v_j = v_j(t)$, а из проекции уравнений импульса на ось y — $\rho_j^{-1} P_{jy} = v_{jt}(t)$. Далее будем считать $v_j(t) = 0$ (иначе условия прилипания на неподвижных стенках не выполняются). Таким образом, представление инвариантного решения таково:

$$\begin{aligned} u_j = u_j(y, t), \quad v_j = 0, \quad p_j = -\rho_j f_j(t)x + P_j(t), \\ T_j = A_j x + T'_j(y, t), \quad C_j = B_j x + K_j(y, t). \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Решению (1.1.14) можно дать следующую интерпретацию, см. рис. 1.1. Предположим, что на границе раздела двух смесей $y = 0$ (кинематическое условие (1.1.4) тождественно выполнено) поверхностное натяжение линейно зависит от температуры и концентрации: $\sigma(T, C) = \sigma_0 - \varkappa_1 T - \varkappa_2 C$, где $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2$ — постоянные. В начальный момент времени первая смесь запол-

няет слой $-l_1 < y < 0$, а вторая — слой $0 < y < l_2$. Смеси находятся в покое, и при $t = 0$ во всем пространстве мгновенно создается поле температур $T'_j = A_j x$ и поле концентраций $C_j = B_j x$. Термоконцентрационный эффект и градиенты давления $f_j(t)$ порождают движение смесей, в котором поверхность раздела остается плоскостью $y = 0$, а траектории являются прямыми, параллельными оси x . Функции u_j, T'_j, K_j можно назвать *возмущениями состояния покоя смесей*.

Рис. 1.1. Геометрия течения смесей



Подстановка (1.1.14) в систему уравнений термодиффузионного движения с учетом условий на границе раздела $y = 0$ приводит к начально-краевой задаче (штрих у переменной T'_j опущен)

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy} + f_j(t), \quad T_{jt} = \chi_j T_{jyy} - A u_j, \quad (1.1.15)$$

$$K_{jt} = D_j K_{jyy} + \alpha_j D_j T_{jyy} - B_j u_j$$

при $-l_1 < y < 0$ ($j = 1$), $0 < y < l_2$ ($j = 2$);

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad T_1(0, t) = T_2(0, t), \quad K_1(0, t) = \lambda K_2(0, t); \quad (1.1.16)$$

$$k_1 T_{1y}(0, t) = k_2 T_{2y}(0, t); \quad (1.1.17)$$

$$D_1(K_{1y}(0, t) + \alpha_1 T_{1y}(0, t)) = D_2(K_{2y}(0, t) + \alpha_2 T_{2y}(0, t)); \quad (1.1.18)$$

$$\rho_2 \nu_2 u_{2y}(0, t) - \rho_1 \nu_1 u_{1y}(0, t) = -\alpha_1 A - \alpha_2 B_1 \equiv H; \quad (1.1.19)$$

$$u_j(y, 0) = 0, \quad T_j(y, 0) = 0, \quad K_j(y, 0) = 0. \quad (1.1.20)$$

Во втором уравнении из системы (1.1.15) имеем $A \equiv A_1 = A_2$

(это следствие равенства температур при $y = 0$); в граничном условии (1.1.16) $\lambda = \text{const}$ — постоянная равновесия Генри, поэтому $B_1 = \lambda B_2$; $\nu_j, \chi_j, D_j, \alpha_j, k_j$ — физические положительные постоянные смесей. К этим условиям необходимо присоединить еще условия на твердых стенках $y = -l_1, y = l_2$:

условия прилипания:

$$u_1(-l_1, t) = u_2(l_2, t) = 0; \quad (1.1.21)$$

задание нулевых возмущений температуры:

$$T_1(-l_1, t) = 0, \quad T_2(l_2, t) = 0; \quad (1.1.22)$$

отсутствие потоков смесей через стенки:

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial y} + \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=-l_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial K_2}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=l_2} = 0. \quad (1.1.23)$$

Видно, что уравнения (1.1.15)–(1.1.23) образуют три последовательно решаемые задачи для функций (u_1, u_2) , (T_1, T_2) , (K_1, K_2) . В силу линейности задачу для нахождения поля скоростей удобно разбить на две: неоднородную в слоях ($f_j(t) \neq 0$) с нулевым граничным условием (1.1.19) и однородную ($f_j(t) = 0$) с ненулевым граничным условием (1.1.19) $H \neq 0$.

З а м е ч а н и е 2. Так как $p_1 = p_2$ при $y = 0$ для всех x , то из динамического условия на поверхности раздела (1.1.5)

$$\rho_1 f_1(t) = \rho_2 f_2(t), \quad P_1(t) = P_2(t). \quad (1.1.24)$$

Без ограничения общности можно считать в формуле (1.1.24) $P_1(t) = P_2(t) = 0$, поскольку они не оказывают влияния на движение смесей.

Система (1.1.1) в цилиндрической системе координат (r, φ, z) допускает двухпараметрическую подгруппу непрерывных преобразований, соответствующую операторам [14]

$$\partial/\partial\varphi, \partial/\partial z + A_j \partial/\partial T + B_j \partial/\partial C_j - \rho_j f_j(t) \partial/\partial p_j,$$

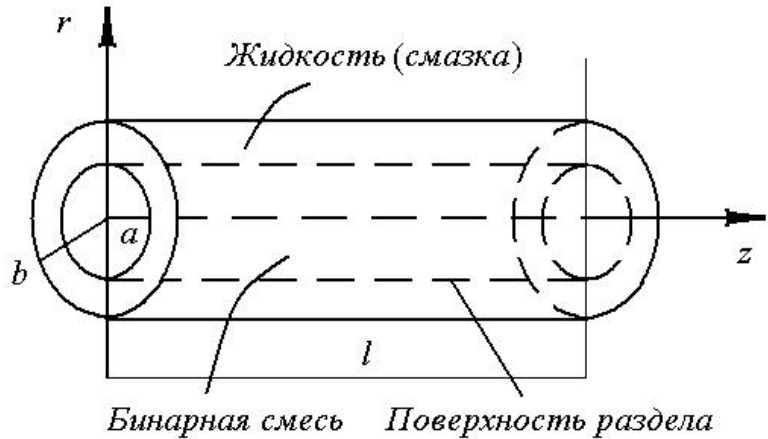
где A_j, B_j — постоянные; $f_j(t) \in C^\infty$ — произвольная функция [14].

Инвариантное вращательно-симметричное решение ищется в виде

$$\begin{aligned} u_j = 0, \quad v_j = 0, \quad w_j = w_j(r, t), \quad p_j = -\rho_j f_j(t)z + \mathcal{P}_j(t), \\ T_j = A_j z + T'_j(r, t), \quad C_1 = Bz + K(r, t) \quad (B \equiv B_1). \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Применим решение (1.1.25) для описания однонаправленного движения *бинарной смеси* и *вязкой теплопроводной жидкости* в круглой цилиндрической трубе радиуса b . Пусть смесь занимает область $0 \leq r \leq a, |z| < \infty$, а вязкая жидкость (смазка) — цилиндрический слой $a \leq r \leq b, |z| < \infty$, так что $w_j(r, t)$ — осевая скорость ($j = 1, 2$), $p_j = -\rho_j f_j(t)z + \mathcal{P}_j(t)$ — давление, $T_j = A_j z + T'_j(r, t)$ — распределение температуры, $C_1 = Bz + K(r, t)$ — распределение концентрации в смеси (рис. 1.2).

Рис. 1.2. Схема области течения



Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела $r = a$ (и здесь условие (1.1.4) тождественно выполняется) линейно зависит от температуры и концентрации по формуле (1.1.2). На поверхности раздела выполнены следующие условия:

$$p_2 - p_1 = \frac{\sigma}{a}, \quad \mu_2 w_{2r} - \mu_1 w_{1r} = -\frac{\partial \sigma}{\partial z}. \quad (1.1.26)$$