Н. С. ДЕНИСОВА, А. В. НИКИФОРОВА

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

УДК 514.144
ББК 22.151.3я73
Д 332

Денисова, Наталья Серафимовна.

Д332 **Дополнительные главы проективной геометрии.** *Учебное пособие / Н. С. Денисова, А. В. Никифорова.* – Москва : Прометей, 2016 – 82 с.

Учебное пособие написано для студентов третьего, четвертого, пятого курсов математического факультета МПГУ, обучающихся по направлению подготовки «Педагогическое образование» и профилям подготовки «Математика и информатика», «Информатика и математика», «Математика и экономика», а также по направлению подготовки «Математика» и профилю подготовки «Преподавание математики и информатики». В доходчивой для студентов форме излагаются основные понятия аффинной и евклидовой геометрии с проективной точки зрения. Пособие содержит большое количество примеров с решениями и задач, помогающих студентам освоить теоретические положения. Для студентов учреждения высшего профессионального образования, а также для желающих овладеть проективными моделями аффинной и евклидовой плоскости.

ISBN 978-5-9907986-3-2

Оглавление

§ 1. Решение задач на построение с помощью одной линейки

1.1. Повторение теоретического материала.

Сложное отношение четырех точек прямой

Пусть на проективной прямой d даны точки A, B, C и D так, что A, B и C – различные точки, а точка D не совпадает с точкой A.

Обозначим (x_1, x_2) координаты точки D в репере R_0 (A, B, C) прямой d. Число $\frac{x_1}{x_2}$ называется *сложным отношением точек* A, B, C, D и обозначается так: (AB, CD).

Если A, B и C – различные точки прямой, а λ – любое действительное число, то на данной прямой существует одна и только одна точка X, такая, что $(AB, CX) = \lambda$. Отсюда следует, что если на прямой даны точки A, B, C, D и D', удовлетворяющие условию $(AB, CD) = (AB, CD')$, то точки D и D' совпадают.

Если на проективной прямой d задан некоторый репер $R = (A_1, A_2, E)$, в котором точки A, B, C и D имеют координаты $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, $D(d_1, d_2)$, то $(AB, CD) = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$.

Свойства сложного отношения четырех точек прямой:

1. $(CD, AB) = (AB, CD)$;
2. $(AB, DC) = \dfrac{1}{(AB, CD)}$; $(BA, CD) = \dfrac{1}{(AB, CD)}$, если $(AB, CD) \neq 0$;
3. $(AB, CD) + (AC, BD) = 1$.

Если $(AB, CD) = -1$, то из свойств сложного отношения четырех точек следует, что $(BA, CD) = (AB, DC) = (CD, AB) = (DC, AB) = (DC, BA) = -1$,

Если $(AB, CD) = -1$, то говорят, что точки A, B, C, D – *гармоническая четверка точек* и что точка D – *четвертая гармоническая* для точек A, B, C.

1.2. Полный четырехвершинник и его свойства

Полным четырехвершинником на проективной плоскости называется фигура, состоящая из четырех точек общего положения и шести прямых, соединяющих попарно эти точки. Указанные точки называются вершинами, а прямые – *сторонами* полного четырехвершинника. Стороны, не имеющие общей вершины, называются *противоположными*. Точки пересечения противоположных сторон называются *диагональными точками*, а прямые, соединяющие попарно диагональные точки, – *диагоналями* полного четырехвершинника.

Свойства полного четырехвершинника:

1°. Диагональные точки полного четырехвершинника не принадлежат одной прямой.

2°. На каждой диагонали полного четырехвершинника диагональные точки гармонически разделяют две точки, в которых эта диагональ пересекает стороны, проходящие через третью диагональную точку.

3°. На каждой стороне полного четырехвершинника две вершины гармонически разделяют пару точек, состоящую из диагональной точки и точки, в которой эта сторона пересекает диагональ, проходящую через две другие диагональные точки.

4. Две противоположные стороны полного четырехвершинника гармонически разделяют две диагонали, проходящие через точку пересечения этих сторон.

Пример 1.1. На расширенной прямой даны три точки A, B, C. Построить четвертую гармоническую точку D для точек A, B, C. (т.е. такую точку D, что $(AB, CD) = -1$)

□ Пусть точки A, B, C принадлежат расширенной прямой l (Рис. 1.1). Построим полный четырехвершинник с диагональю l, у которого A и B диагональные точки.

1) Через первую точку A проводим две прямые a_1 и a_2.

2) Через третью точку C проводим прямую c, пересекающую прямые a_1 и a_2 в точках X и Z.

3) Через вторую точку B и точки X и Z проводим прямые, и обозначим через Y и W точки пересечения прямых BX и a_2, BZ и a_1 соответственно.

4) Прямая YW пересекает прямую l в точке D.■

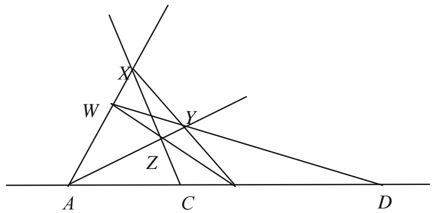

Рис.1.1

Пример 1.2. На расширенной прямой $\bar{l}$ даны три точки A, B и точка С – середина отрезка AB. Точка D^{∞} – бесконечно удаленная точка прямой $\bar{l}$. Доказать, что сложное отношение точек A, B, C, D^{∞} равно – 1.

□ Для того, чтобы доказать, что $(AB, CD^{\infty}) = -1$, покажем, что точка D^{∞} имеет в репере $R(A, B, C)$ координаты (1, – 1).

Через точку C проведем прямую OC, перпендикулярную прямой l (Рис.1.2), а также прямые параллельные прямым OB и OA, которые пересекут прямые OA и OB в точках A_1 и B_1 соответственно.

Тогда четырехугольник OA_1CB_1 является параллелограммом. Поэтому $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$, следовательно, $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC})$ – согласованная тройка векторов относительно репера $R(A,B,C)$.

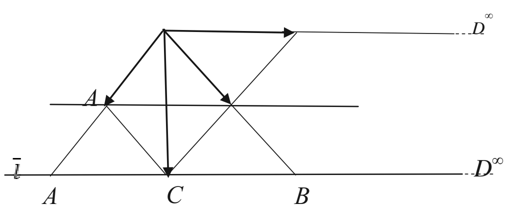

Рис.1.2

В треугольнике ABO отрезок OC является медианой и высотой, следовательно, этот треугольник равнобедренный, поэтому OC –

биссектриса этого треугольника. Значит, диагональ OC параллелограмма OA_1CB_1 также является биссектрисой угла A_1OB_1. Из этого следует, что параллелограмм OA_1CB_1 является ромбом, а его диагонали OC и A_1B_1 перпендикулярны.

Из перпендикулярности прямых OC и l, следует, что прямая A_1B_1 параллельна прямой l. Тогда вектор $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB_1}$. Отложим от точки O вектор $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{A_1B_1}$, который также параллелен прямой l, следовательно, точка D^∞ имеет координаты (1, – 1) в репере $R(A,B,C)$. Поэтому по определению сложного отношения четырех точек $(AB, CD^\infty) = -1$. ■

Решение задач

1.1. На расширенной плоскости даны две параллельные прямые a, b и отрезок AB на прямой a. С помощью одной линейки построить середину C отрезка AB.

Указание. Пусть D^∞ – бесконечно удаленная точка прямых a и b. Используя Пример 1.2, получим, что точка C является четвертой гармонической точкой для точек A, B, D^∞. Надо взять на прямой b любую точку W и построить полный четырехвершинник $XYZW$, у которого вершина Y принадлежит прямой b, а точки A и B являются диагональными точками. (см. Пример 1.1).

1.2. На расширенной плоскости дан отрезок AB и его середина C. С помощью одной линейки через данную точку W, не принадлежащую прямой AB, провести прямую, параллельную прямой AB.

Указание. Пусть D^∞ –бесконечно удаленная точка прямой AB. Используя Пример 1.2, получим, что точка C является четвертой гармонической точкой для точек A, B, D^∞. Надо построить полный четырехвершинник $XYZW$, у которого вершина W принадлежит прямой AB, а точки A и B являются диагональными точками, а точка C является пересечением диагонали AB со стороной XZ (см. Пример 1.1).

1.3. Даны две параллельные прямые a и b и отрезок AB на прямой a. С помощью одной линейки удвоить отрезок AB (т.е. построить такую точку M, что точка B – середина отрезка AM).

Указание. Сначала на прямой b взять отрезок A_1B_1 и построить середину C_1 этого отрезка (см. задачу 1.1). Затем построить точку O пересечения прямых AA_1 и BC_1.

1.4. Даны две параллельные прямые a и b и отрезок AB на прямой a. С помощью одной линейки построить такую точку M, принадлежащую прямой a, что отрезок AM в три раза больше отрезка AB.

1.5. Даны две параллельные прямые a и b и отрезок AB на прямой a. С помощью одной линейки построить такую точку M, принадлежащую прямой a, что отрезок AM в четыре раза больше отрезка AB.

Пример 1.3. На расширенной прямой $\bar{l}$ даны различные точки A,B,C, D. Доказать, что $(AB, CD) = \dfrac{(AB,C)}{(AB,D)}$.

□ Пусть P^∞– бесконечно удаленная точка данной расширенной прямой.

Рассмотрим проективный репер R (P^∞, A, B). на прямой $\bar{l}$ (Рис.1.3). Векторы $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ образуют согласованную тройку векторов относительно данного репера (вектор $\overrightarrow{OP}$ параллелен прямой l и $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}$). Тогда в репере $R(P^\infty, A, B)$ точки A, B, C, D имеют координаты $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(c_1,c_2)$, $D(d_1,d_2)$. Так как точки C, D, P^∞ различны, то $c_2 \neq 0$ и $d_2 \neq 0$, поэтому $C(c,1)$, $D(d,1)$. Значит $(AB, CD) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & d \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & d \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-c(1-d)}{-d(1-c)}$.

Из того, что $C(c,1)_R$, $D(d,1)_R$, получаем, что
$\overrightarrow{OC} = c\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} = c\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = d\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$. Но $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$, поэтому
$\overrightarrow{AC} = c\overrightarrow{OP} = c\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD} = d\overrightarrow{AB}$.