ГЛАВА

ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ, ЛОГИКА, ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

1

1.1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ

В этом разделе рассматриваются таблицы истинности, знакомство с которыми будет для нас первым шагом в изучении логики. Далее мы увидим, что таблицы истинности являются также основным инструментом для определения других важных понятий дискретной математики. Логика, созданная как наука знаменитым Аристотелем (384–322 до н.э.), на протяжении столетий использовалась для развития многих областей знания, включая теологию, философию, математику. Она — тот фундамент, на котором построено все здание математики. По сути, логика — это наука о рассуждениях, которая позволяет определить истинность или ложность того или иного математического утверждения, исходя из совокупности первичных предположений, называемых аксиомами. Логика применяется также в информатике для построения компьютерных программ и доказательства их корректности. Понятия, методы и средства логики лежат в основе современных информационных технологий. Одна из основных целей этой книги — изложить основы математической логики, показать, как она используется в информатике, и разработать методы анализа и доказательства математических утверждений.

Высказывание — это утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Иными словами, утверждение об истинности или ложности высказывания должно иметь смысл. Истинность или ложность, приписываемые некоторому утверждению, называются его ***значением истинности***, или ***истинностным значением***.

Вот примеры предложений, не являющихся высказываниями:

Кто вы? (вопрос),
Прочтите эту главу до следующего занятия (приказ или восклицание),
Это утверждение ложно (внутренне противоречивое утверждение).

Мы будем обозначать высказывания буквами латинского алфавита p, q, r, ... Например, p может обозначать утверждение *Завтра будет дождь*, а q — утверждение *Квадрат целого числа есть число положительное*.

В обыденной речи для образования сложного предложения из простых используются связки — особые части речи, соединяющие отдельные предложения. Наиболее часто употребляются связки *и, или, нет, если ... то, только если*, и *тогда и только тогда*. В отличие от обыденной речи, в логике смысл таких связок должен быть определен однозначно. Истинность сложного высказывания однозначно определяется истинностью или ложностью составляющих его частей. Высказывание, не содержащее связок, называется ***простым***. Высказывание, содержащее связки, называется ***сложным***.

Пусть p и q обозначают высказывания

p : *Джейн водит автомобиль*,
q : *У Боба русые волосы*.

Сложное высказывание

Джейн водит автомобиль и у Боба русые волосы

состоит из двух частей, объединенных связкой *и*. Это высказывание может быть символически записано в виде

$$p \text{ и } q$$

или просто как

$$p \wedge q\,,$$

где символ $\wedge$ обозначает слово *и* на языке символических выражений. Выражение $p \wedge q$ называется ***конъюнкцией*** высказываний p и q.

Точно так же высказывание

Джейн водит автомобиль или у Боба рыжие волосы.

символически выражается как

$$p \text{ или } q$$

или

$$p \vee q\,,$$

где $\vee$ обозначает слово *или* в переводе на символический язык. Выражение $p \vee q$ называется ***дизъюнкцией*** высказываний p и q.

Опровержение, или ***отрицание*** высказывания p обозначается через

$$\sim\! p\,.$$

Таким образом, если p есть высказывание *Джейн водит автомобиль*, то $\sim\! p$ — это утверждение *Джейн не водит автомобиль.*

Если r есть высказывание *Джо нравится информатика*, то *Джейн не водит автомобиль и у Боба русые волосы или Джо любит информатику* символически запишется как $((\sim\! p) \wedge q) \vee r$. И наоборот, выражение $p \wedge (\sim\! q) \wedge r$ — это символическая форма записи высказывания *Джейн водит автомобиль, у Боба волосы не русые и Джо нравится информатика*.

Рассмотрим выражение $p \wedge q$. Если некто говорит: "Джейн водит автомобиль и у Боба русые волосы", то мы, естественно, представляем себе Джейн за рулем автомобиля и русоволосого Боба. В любой другой ситуации (например, если Боб не русоволос или Джейн не водит автомобиль) мы скажем, что говорящий не прав.

Возможны четыре случая, которые нам необходимо рассмотреть. Высказывание p может быть истинным (T) или ложным (F) и независимо от того, какое истинностное значение принимает p, высказывание q может также быть истинным (T) или ложным (F). ***Таблица истинности*** перечисляет все возможные комбинации истинности и ложности сложных высказываний.

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$
1	T	T	T
2	T	F	F
3	F	T	F
4	F	F	F

Ранее мы убедились, что только в первом случае высказывание $p \wedge q$ истинно. В остальных же мы имеем ложное значение $p \wedge q$. Например, случай 3 описывает значение истинности для $p \wedge q$, когда неверно, что Джейн водит автомобиль и у Боба русые волосы. Если p — высказывание *Джон богат*, а q — высказывание *Джон красив*, то не знакомая с Джоном девушка, которую убедили в том, что высказывание *Джон богат и Джон красив*, или *Джон богат и красив* истинно, будет представлять себе Джона и богатым, и красивым.

Точно так же рассмотрим высказывание

Джейн водит автомобиль или у Боба русые волосы,

которое символически выражается как $p \vee q$. Если некто скажет: "Джейн водит автомобиль или у Боба русые волосы", то он будет не прав только тогда, когда Джейн не сможет управлять автомобилем, а Боб не будет русоволосым. Для того чтобы все высказывание было истинным, достаточно, чтобы одна из двух составляющих его компонент была истинной. Поэтому $p \vee q$ имеет таблицу истинности

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$
1	T	T	T
2	T	F	T
3	F	T	T
4	F	F	F

Высказывание $p \vee q$ ложно только в случае 4, когда p и q оба ложны.

Если p — высказывание *Джон богат*, а q — высказывание *Джон красив*, и не знакомая с Джоном девушка уверена в истинности высказывания *Джон богат или Джон красив*, или *Джон богат или красив*, то она вправе ожидать, что истинно одно из высказываний, но не обязательно оба. Девушка почувствует себя введенной в заблуждение, только если обнаружит, что Джон беден и уродлив.

Таблица истинности для отрицания p имеет вид

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{\sim p}$
1	T	F
2	F	T

Истинностное значение $\sim p$ всегда противоположно истинностному значению p. В таблицах истинности отрицание всегда оценивается первым, если только за знаком отрицания не следует высказывание, заключенное в скобки. Поэтому $\sim p \vee q$ интерпретируется как $(\sim p) \vee q$, так что отрицание применяется только к p. Если мы хотим отрицать все высказывание $p \wedge q$, то это записывается как $\sim(p \vee q)$.

Символы $\wedge$ и $\vee$ называют ***бинарными*** связками, так как они связывают два высказывания как, например, в выражениях $p \wedge q$ и $p \vee q$. Символ $\sim$ является ***унарной*** связкой, так как применяется только к одному высказыванию.

Еще одна бинарная связка — это ***исключающее или***, которое обозначается через $\underline{\vee}$. Высказывание $p \,\underline{\vee}\, q$ истинно, когда истинно p или q, но не оба одновременно. Эта связка имеет таблицу истинности

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \,\underline{\vee}\, q}$
1	T	T	F
2	T	F	T
3	F	T	T
4	F	F	F

Используя слово *или*, мы можем иметь в виду *исключающее или*. Например, когда мы говорим: “Дик сдаст экзамен по логике или он не сдаст этот экзамен”, мы, конечно, предполагаем, что Дик сделает что-то одно. Таким образом, когда мы говорим, что p — либо истина, либо ложь, то, естественно, предполагаем, что это не выполняется одновременно. В логике *исключающее или* используется довольно редко, и в дальнейшем мы, как правило, будем обходиться без него.

Рассмотрим высказывание

Сэм уплатит налог за машину или Сэм утратит свою машину и будет ходить на работу пешком.

Пусть p обозначает высказывание *Сэм уплатит налог за машину*, q — высказывание *Сэм останется при своей машине*, а r — высказывание *Сэм будет ходить на работу пешком*. Тогда наше сложное высказывание можно представить в виде

$$p \vee ((\sim q) \wedge r),$$

где скобки использованы, чтобы показать, какие именно высказывания являются компонентами каждой связки.

Таблица истинности дает возможность однозначно указать те ситуации, когда высказывание $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ является истинным; при этом мы должны быть уверены, что учтены все случаи. Поскольку сложное высказывание содержит три основных высказывания p, q и r, то возможны восемь случаев

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{\sim q}$	$\boldsymbol{(\sim q) \wedge r}$	$\boldsymbol{p \vee ((\sim q) \wedge r)}$
1	T	T	T	F	F	T
2	T	T	F	F	F	T
3	T	F	T	T	T	T
4	T	F	F	T	F	T
5	F	T	T	F	F	F
6	F	T	F	F	F	F
7	F	F	T	T	T	T
8	F	F	F	T	F	F

При нахождении значений истинности для столбца $(\sim q) \wedge r$ мы используем столбцы для $(\sim q)$ и r, а также таблицу истинности для $\wedge$. Таблица истинности для $\wedge$ показывает, что высказывание $(\sim q) \wedge r$ истинно лишь в том случае, когда истинны оба высказывания $(\sim q)$ и r. Это имеет место лишь в случаях 3 и 7.

Заметим, что при определении значений истинности для столбца $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ играет роль только истинность высказываний p и $(\sim q) \wedge r$. Таблица истинности для $\vee$ показывает, что единственный случай, когда высказывание, образованное с помощью связки *или*, ложно, — это случай, когда ложны обе части этого высказывания. Такая ситуация имеет место только в случаях 5, 6 и 8.

Если Сэм не уплатит налог за машину (т.е. p ложно, или имеет значение F), лишится своей машины (q имеет значение F) и будет ходить на работу пешком (r имеет значение T), то будет иметь место случай 7. Тот, кто скажет: "Сэм уплатит налог за машину или Сэм утратит машину и будет ходить на работу пешком", будет абсолютно прав.

Другой, эквивалентный способ построения таблицы истинности состоит в том, чтобы записывать истинностные значения выражения под связкой. Снова рассмотрим выражение $p \vee ((\sim q) \wedge r)$. Сначала мы записываем истинностные значения под переменными p, q и r. Единицы под столбцами истинностных значений указывают на то, что этим столбцам истинностные значения присваиваются в первую очередь. В общем случае число под столбцом будет показывать номер шага, на котором производятся вычисления соответствующих истинностных значений.

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p}$	$\vee$	$((\sim$	$\boldsymbol{q})$	$\wedge$	$\boldsymbol{r})$
1	T	T	T	$\boldsymbol{T}$			$\boldsymbol{T}$		$\boldsymbol{T}$
2	T	T	F	$\boldsymbol{T}$			$\boldsymbol{T}$		$\boldsymbol{F}$
3	T	F	T	$\boldsymbol{T}$			$\boldsymbol{F}$		$\boldsymbol{T}$
4	T	F	F	$\boldsymbol{T}$			$\boldsymbol{F}$		$\boldsymbol{F}$
5	F	T	T	$\boldsymbol{F}$			$\boldsymbol{T}$		$\boldsymbol{T}$
6	F	T	F	$\boldsymbol{F}$			$\boldsymbol{T}$		$\boldsymbol{F}$
7	F	F	T	$\boldsymbol{F}$			$\boldsymbol{F}$		$\boldsymbol{T}$
8	F	F	F	$\boldsymbol{F}$			$\boldsymbol{F}$		$\boldsymbol{F}$
				1			1		1

Затем мы записываем под символом $\sim$ истинностные значения высказывания $\sim q$.

Случай	p	q	r	p	$\vee$	$((\sim$	$q)$	$\wedge$	$r)$
1	T	T	T	T		**F**	T		T
2	T	T	F	T		**F**	T		F
3	T	F	T	T		**T**	F		T
4	T	F	F	T		**T**	F		F
5	F	T	T	F		**F**	T		T
6	F	T	F	F		**F**	T		F
7	F	F	T	F		**T**	F		T
8	F	F	F	F		**T**	F		F
				1		2	1		1

Далее записываем истинностные значения $(\sim q) \wedge r$ под символом $\wedge$.

Случай	p	q	r	p	$\vee$	$((\sim$	$q)$	$\wedge$	$r)$
1	T	T	T	T		F	T	**F**	T
2	T	T	F	T		F	T	**F**	F
3	T	F	T	T		T	F	**T**	T
4	T	F	F	T		T	F	**F**	F
5	F	T	T	F		F	T	**F**	T
6	F	T	F	F		F	T	**F**	F
7	F	F	T	F		T	F	**T**	T
8	F	F	F	F		T	F	**F**	F
				1		2	1	3	1

Наконец, записываем значения высказывания $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ под символом $\vee$.

Случай	p	q	r	p	$\vee$	$((\sim$	$q)$	$\wedge$	$r)$
1	T	T	T	T	**T**	F	T	F	T
2	T	T	F	T	**T**	F	T	F	F
3	T	F	T	T	**T**	T	F	T	T
4	T	F	F	T	**T**	T	F	F	F
5	F	T	T	F	**F**	F	T	F	T
6	F	T	F	F	**F**	F	T	F	F
7	F	F	T	F	**T**	T	F	T	T
8	F	F	F	F	**F**	T	F	F	F
				1	4	2	1	3	1

ПРИМЕР 1.1. Пусть p, q и r обозначают, соответственно, высказывания *Фрэд любит футбол*, *Фрэд любит гольф*, *Фрэд любит теннис*. Требуется записать высказывание *Фрэд любит футбол и неверно, что он любит гольф или теннис* в символической форме и указать соответствующую ему таблицу истинности.

Сначала заменим это высказывание эквивалентным — *Фрэду нравится футбол и неверно, что Фрэд любит гольф или теннис*. Высказывание *Фрэд любит гольф или теннис* в символической форме записывается как $q \vee r$. Высказывание *Неверно, что Фрэд любит гольф или теннис*, символически записывается как $\sim(q \vee r)$, поскольку отрицание применяется ко всему высказыванию, которое следует после "что". Итак, исходное высказывание символически изображается $p \wedge (\sim(q \vee r))$. Таблица истинности этого высказывания имеет вид

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p}$	$\wedge$	$(\sim$	$(\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}))$
1	T	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T
2	T	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T
3	T	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T
4	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F
5	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T
6	F	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T
7	F	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T
8	F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	F
				1	$*$	3	2

□

■ УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите среди указанных ниже предложений высказывания. Укажите их истинностные значения.

а) Который час?

б) Целое число 1 есть наименьшее положительное целое число.

в) Если $x = 3$, то $x^2 = 6$.

г) Берегись автомобиля!

д) Южная Дакота — южный штат.

2. Найдите среди указанных ниже предложений высказывания. Укажите их истинностные значения.

а) Все четные числа делятся на 2.

б) Загрузите пакеты в машину.

в) Это утверждение не может быть истинным.

г) Юпитер — ближайшая к солнцу планета.

д) Не следует хранить компакт-диски в микроволновой печи.

3. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p : *Путешествие на Марс является дорогостоящим.*
q : *Я совершу путешествие на Марс.*
r : *У меня есть деньги.*

Запишите в символической форме такие высказывания:

а) *У меня нет денег и я не совершу путешествие на Марс.*

б) *У меня нет денег и путешествие на Марс является дорогостоящим или я совершу путешествие на Марс.*

в) *Неверно, что у меня есть деньги и я полечу на Марс.*

г) *Путешествие на Марс не является дорогостоящим и я полечу на Марс или путешествие на Марс является дорогостоящим и я не полечу на Марс.*

4. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p : *Мой компьютер — быстродействующий.*
q : *Я окончу проект вовремя.*
r : *Я сдам экзамен.*

Запишите в символической форме такие высказывания:

а) *У меня не быстродействующий компьютер или я закончу проект вовремя.*

б) *Я не закончу проект вовремя и не сдам экзамен.*

в) *Неверно, что я закончу проект и сдам экзамен.*

г) *У меня быстродействующий компьютер или я не закончу проект вовремя и сдам экзамен.*

5. Постройте таблицы истинности для каждого высказывания в упражнении 3.

6. Постройте таблицы истинности для каждого высказывания в упражнении 4.

7. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p : *Эта игра очень трудна.*
q : *Я играю в шахматы.*
r : *Игра в шахматы требует времени.*

Интерпретируйте следующие выражения как обычные высказывания:

а) $q \wedge r$;

б) $\sim p \vee \sim q$;

в) $(p \vee r) \wedge q$;

г) $p \wedge q \wedge r$.

8. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p : *Доги — большие собаки.*
q : *У меня маленький дом.*
r : *У меня есть дог.*

Представьте следующие символические выражения как обычные высказывания:

а) $p \wedge q \wedge \sim r$;

б) $p \wedge (\sim q \vee \sim r)$;

в) $(p \vee \sim q) \wedge r$;

г) $(p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$.

9. Постройте таблицы истинности для высказываний в упражнении 7.

10. Постройте таблицы истинности для высказываний в упражнении 8.

11. Постройте таблицы истинности для следующих высказываний:

а) $p \wedge (q \vee \sim r)$;

б) $(q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge r)$;

в) $\sim(p \wedge r) \vee (\sim q \wedge r)$;

г) $\sim(\sim p \vee (q \wedge \sim r))$;

д) $(p \wedge r) \vee (p \wedge \sim q)$.

12. Постройте таблицы истинности для следующих высказываний:

а) $(p \vee q) \wedge (r \vee q)$;

б) $(\sim q \wedge r) \vee \sim(p \wedge r)$;

в) $\sim((p \wedge r) \vee \sim q)$;

г) $\sim(\sim p \wedge (q \vee \sim r))$;

д) $(p \vee \sim r) \wedge \sim(p \vee \sim q)$.

1.2. УСЛОВНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Допустим, некто утверждает, что если случится одно событие, то случится и другое. Это утверждение зачастую принимает форму угрозы, но мы рассмотрим более позитивный пример. Предположим, отец говорит сыну: “Если в этом семестре ты сдашь все экзамены на «отлично», я куплю тебе машину”. Заметьте, что высказывание имеет вид: *если p, то q*, где p — высказывание *В этом семестре ты сдашь все экзамены на «отлично»*, а q — высказывание *Я куплю тебе машину*. Сложное высказывание мы обозначим символически через $p \to q$. Спрашивается, при каких условиях отец говорит правду? Предположим, высказывания p и q истинны. В этом случае счастливый студент получает отличные оценки по всем предметам, и приятно удивленный отец покупает ему машину. Естественно, ни у кого не вызывает сомнения тот факт, что высказывание отца было истинным. Однако существуют еще три других случая, которые необходимо рассмотреть. Допустим, студент действительно добился отличных результатов, а отец не купил ему машину. Самое мягкое, что можно сказать об отце в таком случае, — это то, что он солгал. Следовательно, если p истинно, а q ложно, то $p \to q$ ложно. Допустим теперь, что студент не получил положительные оценки, но отец тем не менее купил ему машину. В этом случае отец предстает очень щедрым, но его никак нельзя назвать лжецом. Следовательно, если p ложно и q истинно, то высказывание *если p, то q* (т.е. $p \to q$) истинно. Наконец, предположим, что студент не добился отличных результатов, и отец не купил ему машину. Поскольку студент не выполнил свою часть соглашения, отец тоже свободен от обязательств. Таким образом, если p и q ложны, то $p \to q$ считается истинным. Итак, единственный случай, когда отец солгал, — это когда он дал обещание и не выполнил его.

Таким образом, таблица истинности для высказывания $p \to q$ имеет вид

Случай	p	q	$p \to q$
1	T	T	T
2	T	F	F
3	F	T	T
4	F	F	T

Символ $\to$ называется ***импликацией***, или ***условной связкой***.

Еще одним примером, который подтверждает таблицу истинности для импликации, является высказывание

Если целое число равно 3, то его квадрат равен 9.

Конечно, желательно, чтобы это высказывание было истинным всегда. Пусть p — высказывание *Целое число равно 3*, а q — высказывание *Квадрат целого числа равен 9*. Если p и q истинны, то целое число равно 3 и его квадрат равен 9. Это соответствует первой строке таблицы истинности. Если целое число равно -3, то его квадрат по-прежнему равен 9. В этом случае p ложно и q истинно, что совпадает со случаем 3 и подтверждает правильность третьей строки таблицы. Если целое число равно 4, то ложны и p, и q, что соответствует случаю 4. Этим подтверждается правильность четвертой строки таблицы. Заметим, что случай 2 здесь не имеет места, но во всех других случаях эта таблица истинности обеспечила нам желаемый результат.

Может показаться, что $p \to q$ носит характер причинно-следственной связи, но это не является необходимым. Чтобы увидеть отсутствие причины и следствия в импликации, вернемся к примеру, в котором p есть высказывание *Джейн управляет автомобилем*, а q — утверждение *У Боба русые волосы*. Тогда высказывание *Если Джейн управляет автомобилем, то у Боба русые волосы* запишется как

$$\text{если } p, \text{ то } q$$

или как

$$p \to q\,.$$

То, что Джейн управляет автомобилем, никак причинно не связано с тем, что Боб русоволосый. Однако нужно помнить, что истинность или ложность бинарного сложного высказывания зависит только от истинности составляющих его частей и не зависит от наличия или отсутствия между ними какой-либо связи.

ПРИМЕР 1.2. Требуется найти таблицу истинности для выражения

$$(p \to q) \wedge (q \to r)\,.$$

Используя таблицу истинности для $\to$, приведенную выше, построим сначала таблицы истинности для $(p \to q)$ и $(q \to r)$, учитывая, что импликация ложна только в случае, когда $T \to F$.

Случай	p	q	r	$(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$r)$
1	T	T	T	T	**T**	T		T	**T**	T
2	T	T	F	T	**T**	T		T	**F**	F
3	T	F	T	T	**F**	F		F	**T**	T
4	T	F	F	T	**F**	F		F	**T**	F
5	F	T	T	F	**T**	T		T	**T**	T
6	F	T	F	F	**T**	T		T	**F**	F
7	F	F	T	F	**T**	F		F	**T**	T
8	F	F	F	F	**T**	F		F	**T**	F
				1	**2**	1		1	**2**	1

Теперь используем таблицу для $\wedge$, чтобы получить для высказывания

$$(p \to q) \wedge (q \to r)$$

таблицу истинности

Случай	p	q	r	$(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$r)$
1	T	T	T	T	T	T	**T**	T	T	T
2	T	T	F	T	T	T	**F**	T	F	F
3	T	F	T	T	F	F	**F**	F	T	T
4	T	F	F	T	F	F	**F**	F	T	F
5	F	T	T	F	T	T	**T**	T	T	T
6	F	T	F	F	T	T	**F**	T	F	F
7	F	F	T	F	T	F	**T**	F	T	T
8	F	F	F	F	T	F	**T**	F	T	F
				1	2	1	*	1	2	1

□

Высказывание вида $(p \to q) \wedge (q \to p)$ обозначается через $p \leftrightarrow q$. Символ $\leftrightarrow$ называется ***эквиваленцией***. Очевидно, таблица истинности для $(p \to q) \wedge (q \to p)$ определяет таблицу истинности для $p \leftrightarrow q$.

Случай	p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to p)$	$p \leftrightarrow r$
1	T	T	T	T	T	T
2	T	F	F	F	T	F
3	F	T	T	F	F	F
4	F	F	T	T	T	T
				$*$		$*$

Непосредственно из определения вытекает, что эквиваленция истинна только в случае, когда p и q имеют одинаковые истинностные значения.

Может возникнуть вопрос о том, как интерпретировать такие выражения, как $\sim p \vee q$, $p \wedge q \vee r$, $p \wedge q \to r$ и $p \wedge q \leftrightarrow q \vee r$, в которых отсутствуют скобки. Во избежание неоднозначности лучше всегда использовать скобки. Однако здесь, как и в алгебре, имеется приоритет выполнения операций. Операции выполняются в следующей последовательности: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ и $\leftrightarrow$. Поэтому указанные выражения можно интерпретировать как $(\sim p) \vee q$, $(p \wedge q) \vee r$, $(p \wedge q) \to r$ и $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee r)$.

■ УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:
p : *Он купит компьютер.*
q : *Он будет праздновать всю ночь.*
r : *Он выиграет в лотерею.*
Запишите следующие высказывания в виде символических выражений:
а) *Если он выиграет в лотерею, он купит компьютер и будет праздновать всю ночь.*

б) *Если он не купит компьютер, то и праздновать всю ночь не будет.*

в) *Если он выиграет в лотерею, то будет праздновать всю ночь и если он не выиграет в лотерею, то не купит компьютер.*

г) *Если он не выиграет в лотерею или не купит компьютер, то праздновать всю ночь не будет.*

2. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p : *Он читает комиксы.*

q : *Он любит научную фантастику.*

r : *Он — ученый-информатик.*

Запишите следующие высказывания в виде символических выражений:

а) *Если он читает комиксы и любит научную фантастику, то он — ученый-информатик.*

б) *Если он не читает комиксы и не любит научную фантастику, то он не является ученым-информатиком.*

в) *Если он читает комиксы, то он любит научную фантастику и если он не читает комиксы, то он — ученый-информатик.*

г) *Если он — ученый-информатик, то он читает комиксы или он не любит научную фантастику.*

3. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p : *Ему нравятся фиолетовые галстуки.*

q : *Он популярен.*

r : *У него странные друзья.*

Запишите следующие символические выражения в виде высказываний:

а) $(p \wedge q) \to r$;

б) $q \to \sim r$;

в) $p \to (q \vee r)$;

г) $(p \to \sim q) \wedge (q \to r)$.

4. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p : *Он удачлив.*

q : *Он популярен.*

r : *Он богат.*

Запишите следующие символические выражения как высказывания:

а) $\sim(p \to q)$;

б) $(p \vee r) \to q$;

в) $q \leftrightarrow (p \wedge r)$;

г) $(p \to q) \wedge (\sim r \to (\sim p \vee \sim q))$.

5. Постройте таблицы истинности для следующих выражений:

а) $(p \to q) \to r$;

б) $p \to (q \to r)$;

в) $q \to (p \wedge r) \leftrightarrow ((q \to p) \wedge (q \to r))$;

г) $((p \to q) \vee r) \to (\sim p \vee \sim q)$.

6. Постройте таблицы истинности для следующих выражений:

а) $(p \to q) \to (q \to r)$;

б) $(p \to q) \vee \sim(r \wedge q)$;
в) $(p \vee r) \to (p \wedge q)$;
г) $\sim((p \to q) \wedge \sim r) \to (p \vee \sim r)$;
д) $((p \to q) \wedge \sim(r \vee p)) \to (\sim p \vee \sim q)$.

7. Постройте таблицы истинности для следующих выражений:
а) $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$;
б) $(p \wedge \sim(q \vee \sim r)) \leftrightarrow (p \to q)$;
в) $(p \vee r) \to q$;
г) $((p \to q) \wedge (q \to \sim r)) \to (r \to p)$;
д) $(p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$.

8. Постройте таблицы истинности для следующих выражений:
а) $(\sim(p \wedge \sim r) \vee q) \to (q \vee r)$;
б) $\sim((p \wedge \sim q) \vee r) \leftrightarrow (r \to q)$;
в) $(\sim(p \to q) \to (q \to r))$;
г) $(p \vee q) \wedge (p \to r)$;
д) $((p \vee r) \to q) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$.

9. Укажите, какие из следующих высказываний являются истинными:
а) *Если* $2^2 = 4$*, то* $3^2 = 9$;
б) *Если* $2^2 = 5$*, то* $3^2 = 9$;
в) *Если* $2^2 = 5$*, то* $3^2 = 10$;
г) *Если* $2^2 = 4$*, то* $3^2 = 10$.

10. Таблица истинности простого высказывания содержит две строки. Высказывание, состоящее из двух компонент, имеет таблицу истинности из четырех строк; сложное высказывание, составленное из трех простых, имеет таблицу истинности из восьми строк. Сколько строк содержит таблица истинности высказывания, состоящего из четырех компонент? А если высказывание состоит из n компонент?

1.3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Особый интерес представляют сложные высказывания, имеющие различное строение, но являющиеся истинными в одних и тех же случаях. Такие высказывания называются ***логически эквивалентными***. Эквивалентность двух высказываний легко установить посредством сравнения их таблиц истинности.

Например, пусть p и q обозначают высказывания

p: *Сегодня шел дождь.*
q: *Сегодня шел снег.*

Рассмотрим сложные высказывания

Неверно, что сегодня шел дождь или снег, или символически

$$\sim(p \vee q)\,,$$

и

Сегодня не шел дождь и сегодня не шел снег,

или символически

$$\sim p \wedge \sim q\,.$$

Построим таблицы истинности для обоих высказываний.

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\sim}$	$\boldsymbol{(p \vee q)}$	$\boldsymbol{\sim p}$	$\boldsymbol{\wedge}$	$\boldsymbol{\sim q}$
1	T	T	F	T	F	F	F
2	T	F	F	T	F	F	T
3	F	T	F	T	T	F	F
4	F	F	T	F	T	T	T
			*			#	

Итак, во всех четырех строках истинностные значения для $\sim(p \vee q)$ (обозначенные *) и для $\sim p \wedge \sim q$ (обозначенные #) совпадают. Это означает, что два рассматриваемых высказывания логически эквивалентны, т.е.

$$\sim(p \vee q) \equiv\ \sim p \wedge \sim q\,.$$

Эквивалентность — очень полезное свойство; используя его, можно строить отрицание высказываний с “или”, осуществляя отрицание каждой из его частей и меняя “или” на “и”.

С условным высказыванием — импликацией $p \to q$ — связаны еще три типа высказываний: ***конверсия***, ***инверсия*** и ***контрапозиция*** высказывания $p \to q$. Они определяются следующим образом:

$p \to q$	импликация
$q \to p$	конверсия высказывания $p \to q$
$\sim p \to \sim q$	инверсия высказывания $p \to q$
$\sim q \to \sim p$	контрапозиция высказывания $p \to q$

Пусть дано высказывание-импликация *Если он играет в футбол, то он популярен*. Для этой импликации имеем:

конверсия:	*Если он популярен, то он играет в футбол*
инверсия:	*Если он не играет в футбол, то он не популярен*
контрапозиция:	*Если он не популярен, то он не играет в футбол*

Важно понимать, что высказывания *Если он живет в Детройте, то Боб навестит его* и *Боб навестит его, если он живет в Детройте* по сути являются одним и тем же высказыванием. Однако высказывание *Если Боб навестит его, то он живет в Детройте* не совпадает с предыдущими высказываниями. Не важен порядок, в котором p и q присутствуют в предложении, а важно, какая часть предложения является частью "если", а какая часть является частью "то". Может показаться, что при замене *если p, то q* на *q, если p* получается конверсия, но с логической точки зрения последнее высказывание совпадает с исходным.

Часть (ж) теоремы, которая будет сформулирована ниже, говорит о том, что импликация и ее контрапозиция логически эквивалентны. Эквивалентность и контрапозиция условных высказываний имеют в математике большое значение. Зачастую гораздо легче доказать теорему от противного, чем дать ее прямое доказательство. Используя эквивалентность импликации и ее контрапозиции, нетрудно показать, что конверсия и инверсия импликации имеют одну и ту же таблицу истинности. В то же время импликация и ее конверсия (или инверсия) имеют различные таблицы истинности. Непонимание этого факта — источник распространенных ошибок в так называемых "логических" рассуждениях.

ТЕОРЕМА 1.3. Используя таблицы истинности, можно доказать следующие логические эквивалентности:

а) ***Законы идемпотентности***

$$p \wedge p \equiv p\,;$$
$$p \vee p \equiv p\,.$$

б) ***Закон двойного отрицания***

$$\sim(\sim p) \equiv p\,.$$

в) ***Законы де Моргана***

$$\sim(p \vee q) \equiv \ \sim p\ \wedge \sim q\,;$$
$$\sim(p \wedge q) \equiv \ \sim p\ \vee \sim q\,.$$

г) ***Свойства коммутативности***

$$p \wedge q \equiv q \wedge p\,;$$
$$p \vee q \equiv q \vee p\,.$$

д) ***Свойства ассоциативности***

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r\,;$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r\,.$$

е) ***Свойства дистрибутивности***

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r);$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

ж) ***Закон контрапозиции***

$$p \to q \equiv \ \sim q \to \sim p\,.$$

з) ***Другие полезные свойства***

$$p \to q \equiv \ \sim p \vee q\,;$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p).$$

Отметим, что благодаря свойству ассоциативности высказывания $(p \wedge q) \wedge r$ и $p \wedge (q \wedge r)$ могут быть записаны в виде $p \wedge q \wedge r$. Аналогично, $(p \vee q) \vee r$ и $p \vee (q \vee r)$ можно записать просто как $p \vee q \vee r$.

Высказывание, истинное во всех случаях, называется ***логически истинным***, или ***тавтологией***; высказывание, построенное так, что оно ложно в каждом случае, называется ***логически ложным***, или ***противоречием***. Теоремы в математике являются примерами тавтологий. Было бы неприятно сознавать, что математические теоремы справедливы, к примеру, только в 80 процентах случаев. Высказывание *Он сдаст или не сдаст экзамен* есть пример тавтологии, поскольку либо одно событие, либо другое обязательно должно иметь место. Каждое высказывание вида $p \vee \sim p$ — тавтология. Шекспир должен был бы провозгласить: "Быть или не быть, это и есть тавтология". Высказывание *Если сдаст, то сдаст* — тоже тавтология, хотя оно и не отличается глубиной. Примером тавтологии является высказывание *Если он богат и удачлив, то он удачлив*. Высказывание *Она движется в направлении Техаса и она не движется в направлении Техаса* всегда ложно, т.к. нельзя делать одновременно и то, и другое. Следовательно, это противоречие.

Рассмотрим высказывание вида

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q\,.$$

Ему соответствует таблица истинности

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{(p}$	$\boldsymbol{\wedge}$	$\boldsymbol{(p \rightarrow q))}$	$\boldsymbol{\rightarrow}$	$\boldsymbol{q}$
1	T	T	T	T	T	T	T
2	T	F	T	F	F	T	F
3	F	T	F	F	T	T	T
4	F	F	F	F	T	T	F
						$*$	

Столбец, обозначенный звездочкой, дает истинностные значения исходного сложного высказывания. Высказывание истинно во всех четырех возможных случаях, следовательно, является тавтологией.

Имея логически истинное высказывание-тавтологию, легко построить логически ложное высказывание-противоречие. Для этого достаточно взять отрицание логически истинного высказывания. Поэтому высказывание

$$\sim((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$$

логически ложно.

Давайте теперь рассмотрим некоторые свойства, связанные с логически истинными и логически ложными высказываниями. Пусть символ $\boldsymbol{T}$ обозначает высказывание, которое есть тавтология, поэтому имеет таблицу истинности, состоящую из одних T. Символом $\boldsymbol{F}$ обозначим противоречие, т.е. высказывание, таблица истинности которого содержит F во всех строках. Используя таблицы истинности, можно показать, что

$$\begin{array}{llll} p & \wedge & \boldsymbol{T} & \equiv p\,, \\ p & \wedge & \boldsymbol{F} & \equiv \boldsymbol{F}\,, \\ p & \vee & \boldsymbol{T} & \equiv \boldsymbol{T}\,, \\ p & \vee & \boldsymbol{F} & \equiv p\,, \\ p & \wedge & \sim p & \equiv \boldsymbol{F}\,, \\ p & \vee & \sim p & \equiv \boldsymbol{T}\,, \\ p & \rightarrow & p & \equiv \boldsymbol{T}\,. \end{array}$$

В каждом высказывании можно заменить любую его компоненту на логически эквивалентное ей высказывание. Полученное в результате такой замены высказывание будет логически эквивалентно исходному, поскольку истинностное значение высказывания зависит исключительно от истинностных значений составляющих его компонент (но не от их формы или сложности). Например,

$$\begin{array}{rcll} (q \vee r) \vee (p \wedge \sim r) & \equiv & q \vee (r \vee (p \wedge \sim r) \equiv & \text{свойство ассоциативности} \\ & \equiv & q \vee ((r \vee p) \wedge (r \vee \sim r)) \equiv & \text{свойство дистрибутивности} \\ & \equiv & q \vee ((r \vee p) \wedge \boldsymbol{T}) \equiv & \text{эквивалентность} \\ & \equiv & q \vee (r \vee p) \equiv & \text{эквивалентность} \\ & \equiv & q \vee (p \vee r) \equiv & \text{свойство коммутативности} \\ & \equiv & (q \vee p) \vee r \equiv & \text{свойство ассоциативности} \\ & \equiv & (p \vee q) \vee r\,. & \text{свойство коммутативности} \end{array}$$

Здесь мы впервые использовали законы логики и фиксированное множество “истинных высказываний” для образования новых “истинных” высказываний.

Условные высказывания могут выражаться в виде различных языковых конструкций, но символически все они записываются как $p \rightarrow q$. Вот несколько примеров таких конструкций:

Если p*, то* q.

p *достаточно для* q.
p *является достаточным условием для* q.

q *необходимо для* p.
q *является необходимым условием для* p.

p*, только если* q *(или: только если* q*, то* p*).*

Таблица для $p \rightarrow q$ показывает, что если $p \rightarrow q$ истинно и p истинно, тогда q должно быть истинным, т.е. истинность p достаточна для истинности q. Поэтому p *достаточно для* q имеет тот же смысл, что и $p \rightarrow q$. Таким образом, если q ложно и q *необходимо для* p, тогда p должно быть ложно. Поэтому, если $\sim q$ истинно, тогда $\sim p$ должно быть истинно и $\sim q \rightarrow \sim p$. Но последнее выражение — контрапозиция для $p \rightarrow q$; следовательно, q *необходимо для* p имеет то же значение, что и $p \rightarrow q$.

Анализ значения p *только если* q проводится аналогично. Получаем, что p может быть истинным, только если q истинно. Если q не истинно, то p не может быть истинным. Но это эквивалентно утверждению, что если $\sim q$ истинно, то $\sim p$ должно быть истинно и $\sim q \to \sim p$. Последнее есть контрапозиция высказывания $p \to q$, поэтому p *только если* q имеет то же значение, что и $p \to q$.

Ранее было установлено, что порядок простых высказываний в составе условного высказывания не имеет значения; важно то, какое из простых высказываний следует за *если* (или в данном случае *только если*), а какое следует за *то*. Поэтому утверждения *Только накопив денег, Фрэд сможет поступить в колледж* и *Фрэд сможет поступить в колледж, только если накопит денег* рассматриваются как одно и то же высказывание.

ПРИМЕР 1.4. Приведите следующие высказывания к виду $p \to q$ или $q \to p$:

а) *Он добьется успеха, только если будет усердно работать.*

б) *Он счастлив, только если управляет автомобилем.*

в) *Наличия денег достаточно, чтобы быть счастливым.*

г) *Наличие денег необходимо, чтобы быть счастливым.*

д) *Чтобы победить на выборах, нужно набрать достаточно голосов.*

Ответ:

а) Если через p обозначить высказывание *Он добьется успеха*, а через q — *Он будет усердно работать*, то высказывание *если* p*, то* q, или $p \to q$ примет вид *Если он добивается успеха, то он работает усердно.*

б) Если p обозначает *Он управляет автомобилем*, а q — *Он счастлив*, то высказывание q *только если* p, или $q \to p$ имеет вид *Если он счастлив, то он управляет автомобилем.*

в) Пусть p обозначает *У него есть деньги*, а q есть *Он счастлив*. Тогда высказывание p достаточно для q, или $p \to q$ может быть записано как *Если у него есть деньги, он счастлив.*

г) Пусть p обозначает *У него есть деньги*, а q обозначает *Он счастлив*. Тогда высказывание p *необходимо для* q, или $q \to p$ будет иметь вид *Если он счастлив, то у него есть деньги.*

д) Пусть p обозначает *Он победит на выборах*, а q обозначает *Он получит достаточное количество голосов*, тогда высказывание q *необходимо для* p, или *если* p*, то* q, или $p \to q$ может быть записано в виде *Если он победит на выборах, то он получит достаточное количество голосов.* □

Вернемся к рассмотрению логической связки $\leftrightarrow$. Поскольку высказывания вида $p \leftrightarrow q$ и $(p \to q) \wedge (q \to p)$ логически эквивалентны, то $p \leftrightarrow q$ означает то же, что и p *тогда и только тогда, когда* q, или p *если и только если* q. Пусть, например, p обозначает высказывание *Джим будет играть в футбол*, а q — высказывание *Джейн организует поддержку зрителей*. Тогда $p \leftrightarrow q$ может быть выражено как

Джим будет играть в футбол, если и только если
Джейн организует поддержку зрителей.

Следующие языковые конструкции, выражающие эквиваленцию высказываний $p \leftrightarrow q$, равносильны:

p если и только если q.
p необходимо и достаточно для q.
p есть необходимое и достаточное условие для q.

Пусть имеется высказывание

Сэм играет в гольф тогда и только тогда, когда тепло,

тогда ожидается, что если будет тепло, то мы увидим Сэма, играющего в гольф, и если Сэм играет в гольф, то погода, безусловно, теплая.

Точно так же, если имеется высказывание

Быть счастливым является необходимым и достаточным условием, чтобы быть удачливым,

то имеется в виду, что если Джон счастливчик, то он и удачлив, а если Джону везет, то он, конечно, счастливчик.

■ УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя таблицы истинности, докажите следующие эквивалентности:

а) Закон де Моргана

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q\,.$$

б) Свойство ассоциативности связки $\vee$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r\,.$$

в) Свойство дистрибутивности связки *или* относительно *и*

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)\,.$$

г) Эквивалентность импликации и высказывания со связкой *или*

$$p \to q \equiv \sim p \vee q\,.$$

2. Используя пункт (г) предыдущего упражнения, покажите, что отрицание для $p \to q$ эквивалентно $p \wedge \sim q$.

3. Ранее были рассмотрены связанные между собой условные высказывания, включающие в качестве компонент высказывания p и q. Ими являлись

$p \to q$	импликация,
$q \to p$	конверсия (для $p \to q$),
$\sim q \to \sim p$	контрапозиция (для $p \to q$),
$\sim p \to \sim q$	инверсия (для $p \to q$).

Используя таблицы истинности, докажите, что

$$p \to q \not\equiv q \to p\,.$$

Импликация эквивалентна своей контрапозиции, но не эквивалентна своей конверсии. Часто используется выражение *если p, то q, и наоборот*. На самом деле это означает *если p, то q, и если q, то p*, или

$$(p \to q) \wedge (q \to p),$$

что эквивалентно $p \leftrightarrow q$, или *p, если и только если q*. Докажите, что $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$, не используя непосредственно таблицы истинности. На основании этого результата докажите, что инверсия импликации эквивалентна ее конверсии.

4. Используя логически эквивалентные высказывания и не применяя непосредственно таблицы истинности, покажите, что
   а) $p \equiv \sim(p \wedge s) \to (\sim s \wedge p)$.
   б) $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.

5. Преобразуйте следующие высказывания к виду *если p, то q*:
   а) *Он кентавр, только если он имеет шесть ног.*
   б) *Чтобы быть преуспевающим политиком, нужно быть избранным.*
   в) *Достаточно иметь деньги, чтобы быть популярным.*

6. Преобразуйте следующие высказывания к виду *если p, то q*:
   а) *Необходимо иметь шлем, чтобы играть в американский футбол.*
   б) *Только если я читаю Шекспира, я литературно образован.*
   в) *Для меня сдать этот курс достаточно, чтобы получить диплом.*

7. Дано высказывание *Если я голосую, то я хороший гражданин.*
   а) Сформулируйте конверсию этого выражения.
   б) Сформулируйте инверсию этого выражения.
   в) Сформулируйте контрапозицию этого выражения.

8. Дано высказывание *Если я не буду выплачивать ссуду, у меня отберут участок.*
   а) Сформулируйте конверсию этого высказывания.
   б) Сформулируйте инверсию этого высказывания.
   в) Сформулируйте контрапозицию этого высказывания.

1.4. АКСИОМАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Математики в большинстве своем имеют дело с теоремами и их доказательствами. Теоремы представляют собой “истинные” утверждения относительно рассматриваемых математических систем. Например, утверждение

Гипотенуза прямоугольного треугольника
длиннее любого из катетов

— это известная из геометрии теорема Евклида. Это утверждение считается истинным, поскольку оно “выводимо” из ранее принятых или выведенных истин геометрии Евклида.

Математическая система начинается с неопределяемых понятий и утверждений, точно описывающих фундаментальные характеристики или истинные утверждения относительно этих понятий, которые математики используют для образования системы. Эти фундаментальные характеристики называются аксиомами или постулатами. Утверждения, выведенные (доказанные) только на основе этих фундаментальных свойств (аксиом и постулатов) и ранее доказанных утверждений с помощью логических правил, называются ***теоремами***.

Таким образом, в математических системах вся информация, необходимая для доказательства теоремы, должна содержаться в аксиомах и ранее доказанных теоремах. Развивая конкретный раздел математики, можно не включать в него все аксиомы и доказанные теоремы. Вместо этого можно принять доказанные теоремы в качестве аксиом. Например, аксиомы для целых чисел и аксиомы Пеано для положительных целых чисел неявным образом предполагают выполнение аксиом теории множеств, но, поскольку в теории чисел акцент делается на свойствах целых чисел, было бы излишним стремиться в ней одновременно к полному развитию теории множеств.

Важно, что логические правила, которые используются для вывода новых теорем из аксиом, постулатов и ранее доказанных в данной системе теорем, не порождают в качестве "теорем" ложные высказывания. Эти логические правила называются ***правилами вывода***. ***Умозаключение*** состоит из совокупности утверждений, называемых гипотезами, или посылками, и утверждения, называемого заключением. ***Правильным умозаключением*** называется такое умозаключение, заключение которого истинно всякий раз, когда истинны его гипотезы. Правила вывода выбираются так, чтобы они были правильными умозаключениями.

Умозаключения часто представляют в виде

$$\begin{array}{rll} & H_1 & \\ & H_2 & \text{гипотезы} \\ & \underline{H_3} & \\ \therefore & C & \text{заключение} \end{array}$$

Символ $\therefore$ означает "следовательно". Гипотезы представляют собой перечень одного или более высказываний, или ***посылок***. Умозаключение правильно, если всякий раз, когда $H_1, H_2,$ и H_3 истинны, то истинно и C или, что равносильно, всякий раз, когда $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3$ истинно, истинно и C.

Правильность умозаключения можно проверить двумя способами. Во-первых, мы можем построить таблицу истинности и показать, что всякий раз, когда гипотезы истинны, истинно и заключение. Во-вторых, мы можем использовать таблицы истинности для обоснования правил вывода, а затем использовать правила вывода для доказательства справедливости заключения. Длинные умозаключения, как правило, проще обосновывать при помощи правил вывода. В частности, используя правила вывода, легко проверить правильность умозаключения

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ & r \to s \\ & \underline{s \to t} \\ \therefore & p \to t \end{array}$$

Проверка того же утверждения с использованием таблиц истинности намного сложнее. Однако, при помощи таблиц истинности мы можем доказать ложность утверждения, чего правила вывода сделать не позволяют.

Рассмотрим умозаключение

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ & \underline{q \to r} \\ \therefore & p \wedge q \wedge r \end{array}$$

Таблицы истинности для посылок и заключения имеют следующий вид.

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p \to q}$	$\boldsymbol{q \to r}$	$\boldsymbol{p \wedge q \wedge r}$
1	T	T	T	T	T	T	T
2	T	T	F	T	T	F	F
3	T	F	T	T	F	T	F
4	T	F	F	T	F	T	F
5	F	T	T	F	T	T	T
6	F	T	F	F	T	F	F
7	F	F	T	F	T	T	T
8	F	F	F	F	T	T	T
				1	2	3	$*$

Заметим, что, когда истинны все посылки (что имеет место в случае 1), истинным также является и заключение, а само умозаключение является правильным.

Рассмотрим умозаключение

$$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & p \to r \\ & \underline{q \to r} \\ \therefore & r \end{array}$$

Построим для него таблицу истинности.

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{p \to q}$	$\boldsymbol{q \to r}$	$\boldsymbol{r}$
1	T	T	T	T	T	T	T
2	T	T	F	T	F	F	F
3	T	F	T	T	T	T	T
4	T	F	F	T	F	T	F
5	F	T	T	T	T	T	T
6	F	T	F	T	T	F	F
7	F	F	T	F	T	T	T
8	F	F	F	F	T	T	F
				1	2	3	$*$

Мы снова приходим к выводу, что, когда все посылки истинны (что имеет место в случаях 1, 3 и 5), заключение истинно, и умозаключение правильно.

Однако, если рассмотреть следующее умозаключение

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \underline{r \qquad} \\ \therefore\ p \end{array}$$

и посмотреть на его таблицу истинности,

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p \to q}$	$\boldsymbol{q \to r}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p}$
1	T	T	T	T	T	T	T
2	T	T	F	T	F	F	T
3	T	F	T	F	T	T	T
4	T	F	F	F	T	F	T
5	F	T	T	T	T	T	F
6	F	T	F	T	F	F	F
7	F	F	T	T	T	T	F
8	F	F	F	T	T	F	F
				1	2	3	$*$

мы обнаружим, что хотя в случае 1 истинны и посылки, и заключение, в случаях 5 и 7 посылки истинны, а заключение ложно. Следовательно, умозаключение не является правильным.

Рассмотрим метод проверки правильности умозаключений, альтернативный методу таблиц истинности. Пока предлагается принять метод на веру, вернувшись к его обоснованию несколько позже. Это не прямой метод, поскольку он направлен на доказательство неправильности умозаключения. В случае успеха такого доказательства это будет свидетельством неправильности умозаключения. Если, предполагая неправильность умозаключения, мы приходим к противоречию, то умозаключение является правильным. Например, рассмотрим умозаключение

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \to r \\ \underline{q \to r} \\ \therefore\ r \end{array}$$

Если умозаключение неправильное, существуют истинностные значения p, q и r, для которых посылки истинны, а заключение ложно. Если заключение ложно, то r ложно. Если $q \to r$ истинно , а r ложно, то q должно быть ложно. Аналогично, если $p \to r$ истинно, тогда p должно быть ложно. Но тогда $p \vee q$ ложно, что приводит к противоречию с утверждением, что заключение ложно, а посылки истинны. На основании этого делаем вывод, что умозаключение правильно.

Рассмотрим умозаключение

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ & r \to s \\ & \underline{s \to t} \\ \therefore & p \to t \end{array}$$

Снова попытаемся свести рассмотрение к случаю, когда заключение ложно, а посылки истинны. Если $p \to t$ ложно, то p должно быть истинно и t ложно. Поскольку t ложно, то из истинности $s \to t$ следует, что s ложно. Если s ложно и $r \to s$ истинно, то r ложно. Если r ложно и $q \to r$ истинно, то q должно быть ложно. Но поскольку p истинно, а q ложно, то $p \to q$ ложно, что невозможно. Опять приходим к противоречию с тем, что заключение ложно, а все посылки истинны. Таким образом, умозаключение правильно.

Рассмотрим умозаключение

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \underline{q \to r} \\ \therefore & p \vee r \end{array}$$

Если заключение ложно, то и p и r — оба ложны. Однако, если q ложно, то $p \to q$ и $q \to r$ — оба истинны. Поскольку обе посылки истинны, а заключение ложно, то умозаключение неправильно. Если посмотреть на таблицу истинности данного умозаключения,

Случай	p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \vee r$
1	T	T	T	T	T	T
2	T	T	F	T	F	T
3	T	F	T	F	T	T
4	T	F	F	F	T	T
5	F	T	T	T	T	F
6	F	T	F	T	F	F
7	F	F	T	T	T	T
8	F	F	F	T	T	F
				1	2	$*$

легко заметить, что рассмотренный случай соответствует строке 8 таблицы истинности, откуда следует неправильность умозаключения.

Рассмотрим умозаключение

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ & \underline{r} \\ \therefore & p \end{array}$$

Если заключение ложно, это означает, что p ложно. Но если посылки истинны, то r истинно. В этом случае $p \to q$ и $q \to r$ истинны вне зависимости от того, истинно q или ложно. Таким образом, имеется два случая, когда можно показать неправильность нашего умозаключения: (1) p ложно, q истинно, r истинно и (2) p ложно, q ложно, r истинно. В этих случаях посылки истинны и заключение ложно. Из таблицы истинности

Случай	p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	r	p
1	T	T	T	T	T	T	T
2	T	T	F	T	F	F	T
3	T	F	T	F	T	T	T
4	T	F	F	F	T	F	T
5	F	T	T	T	T	T	F
6	F	T	F	T	F	F	F
7	F	F	T	T	T	T	F
8	F	F	F	T	T	F	F
				1	2	3	$*$

легко видеть, что это случаи 5 и 7.

Следует обратить внимание, что любое умозаключение с посылками H_1, H_2, H_3, …, H_n и заключением C является правильным тогда и только тогда, когда высказывание

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \ldots \wedge H_n) \to C$$

есть тавтология. Заметим, что порядок следования посылок не является существенным, поскольку

$$H_1 \wedge H_2 \equiv H_2 \wedge H_1.$$

Примем в качестве правила вывода следующее умозаключение, в правильности которого легко убедиться.

$$\begin{array}{rl} & p \\ & \underline{p \to q} \\ \therefore & q \end{array}$$

Это правильное умозаключение называется ***правилом отделения*** (***modus ponens***).

Рассмотрим пример использования правила отделения. Предположим, b — целое число. Пусть p и q заданы следующим образом

$$\begin{array}{ll} p: & b \textit{ четно} \\ q: & b \textit{ делится на } 2, \end{array}$$

так что

$$p \to q: \quad \textit{если } b \textit{ четно, то } b \textit{ делится на } 2\,.$$

Правило отделения дает

$$\begin{array}{rlcrl} & p \to q & & & \textit{если } b \textit{ четное, то } b \textit{ делится на } 2 \\ & \underline{p} & & & \underline{b \textit{ четное}} \\ \therefore & q & & \therefore & b \textit{ делится на } 2 \end{array}$$

Допустим, что высказывание *если b четно, то b делится на* 2 получено как свойство целых чисел и $b = 12$. Тогда обе посылки истинны, так что нет сомнения в том, что 12 делится на 2. С другой стороны, если $b = 13$, тогда p ложно, и хотя умозаключение правильно, нельзя утверждать что-либо о делимости $b = 13$ на 2. Если одна из посылок ложна, то истинность заключения никоим образом не зависит от правильности умозаключения.

Перечислим некоторые правила вывода, на которые мы будем ссылаться в дальнейшем:

а) ***Правило отделения (Modus Ponens)***

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \underline{p\qquad} \\ \therefore & q \end{array}$$

б) ***Силлогизм***

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \underline{q \to r} \\ \therefore & p \to r \end{array}$$

в) ***Modus Tollens***

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \underline{\sim q\qquad} \\ \therefore & \sim p \end{array}$$

г) ***Расширение***

$$\begin{array}{rl} & \underline{p\qquad} \\ \therefore & p \vee q \end{array}$$

д) ***Специализация***

$$\begin{array}{rl} & \underline{p \wedge q} \\ \therefore & p \end{array}$$

е) ***Конъюнкция***

$$\begin{array}{rl} & p \\ & \underline{q\qquad} \\ \therefore & p \wedge q \end{array}$$

ж) ***Выбор***

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to (r \vee s) \\ & r \to q \\ & \underline{s \to q\qquad\quad} \\ \therefore & q \end{array}$$

з) ***Исключающий выбор***

$$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \underline{p \to (r \wedge \sim r)} \\ \therefore & q \end{array}$$

и) *Сведение к абсурду (Reductio ad Absurdum)*

$$\begin{array}{rl} & \sim p \rightarrow (r \wedge \sim r) \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Правильность всех перечисленных умозаключений можно показать с помощью таблиц истинности.

Сведение к абсурду используется в методе доказательства, известном как ***доказательство от противного***. Он состоит в следующем: мы допускаем, что истинным является отрицание того высказывания, которое необходимо доказать; затем пытаемся прийти к противоречию. Если это удается, исходное утверждение доказано. Обратите внимание, именно такое рассмотрение было основой ранее упомянутого метода доказательства правильности умозаключения, альтернативного использованию таблиц истинности. Таким образом, этот альтернативный метод рассуждения является правильным.

Рассмотрим такое умозаключение:

Если яблоко красное, то оно спелое
Яблоко спелое
∴ *Яблоко красное*

В обозначениях

p : *яблоко красное*
q : *яблоко спелое*

умозаключение принимает вид

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Из таблицы истинности

Случай	p	q	$((p \rightarrow q)$	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	p
1	T	T	T	T	T	T	T
2	T	F	F	F	F	T	T
3	F	T	T	T	T	F	F
4	F	F	T	F	F	T	F
						*	

очевидным образом следует неправильность умозаключения. В случае 3 обе посылки $p \rightarrow q$ и q истинны; однако, заключение p таковым не является. Таким образом, умозаключение неправильно. Данный вид неправильного умозаключение называется ***ложной конверсией***. Точно так же умозаключение

$$\begin{array}{rl} & \sim p \rightarrow \sim q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

является неправильным и называется ***ложной инверсией***.

В большинстве аксиоматических систем теоремы и аксиомы могут быть весьма сложными, а их переплетение с правилами вывода — весьма запутанным. Сейчас мы попытаемся объяснить, что происходит в процессе доказательства и как доказательства конструируются. Сложные доказательства обычно представляют собой длинную цепочку правильных умозаключений вышеуказанных типов. Поэтому доказательство можно определить как последовательность утверждений, каждое из которых истинно в силу одной из следующих причин:

а) по предположению;

б) по аксиоме или определению;

в) по ранее доказанной теореме или лемме;

г) выведено из предыдущих утверждений;

д) логически эквивалентно предыдущему утверждению.

Используя логическую символику, в качестве примера покажем, что

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \sim r \to \sim q \\ & \underline{\sim r} \\ \therefore & \sim p \end{array}$$

есть правильное умозаключение.

Номер	Утверждение	Как получено
1	$p \to q$	предположение
2	$\sim r \to \sim q$	предположение
3	$\sim r$	предположение
4	$\sim q$	2, 3 и правило отделения
5	$\sim q \to \sim p$	1 и эквивалентность $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$
6	$\sim p$	4, 5 и правило отделения

Итак, из трех посылок следует заключение $\sim p$, и мы доказали $\sim p$.

В большинстве математических доказательств логика “скрыта” в том смысле, что о ней специально не упоминается. Предполагается, что читатель может отслеживать логику без посторонней помощи, а ее рассмотрение неизбежно усложнило бы сам процесс доказательства. В некоторых доказательствах, которые последуют ниже, мы заглянем за кулисы с тем, чтобы проиллюстрировать использование логики.

■ УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя таблицы истинности, докажите правильность следующих умозаключений.

а) Правило силлогизма

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \underline{q \to r} \\ \therefore & p \to r \end{array}$$

б) Правило выбора

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to (r \vee s) \\ & r \to q \\ & s \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

в) Правило сведения к абсурду (reductio ad absurdum)

$$\begin{array}{rl} & \sim w \to (r \wedge \sim r) \\ \hline \therefore & w \end{array}$$

2. Покажите, что следующее умозаключение не является правильными:

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & r \end{array}$$

3. Определите, какое из следующих умозаключений является правильным:

а)
$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & p \to r \\ & q \vee r \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{rl} & \sim p \vee q \\ & \sim q \vee r \\ & \sim r \\ \hline \therefore & \sim p \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & p \to r \\ & \sim(p \wedge q) \\ \hline \therefore & \sim p \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{rl} & \sim p \vee \sim q \\ & r \vee \sim q \\ & \sim p \\ \hline \therefore & r \vee \sim p \end{array}$$

4. Определите, какое из следующих умозаключений является правильным:

а)
$$\begin{array}{rl} & \sim r \\ & p \to r \\ & q \to r \\ \hline \therefore & \sim(p \wedge q) \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \sim q \vee r \\ & \sim r \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ & q \vee r \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{rl} & p \vee \sim q \\ & r \vee \sim q \\ & \sim p \\ \hline \therefore & \sim r \end{array}$$

5. Установите правильность следующих умозаключений, используя метод, альтернативный применению таблиц истинности:

а)
$$\begin{array}{rl} & s \vee t \\ & t \to r \\ & s \to w \\ \hline \therefore & r \vee w \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ & r \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \sim q \to \sim s \\ & s \to t \\ & t \vee q \\ \hline \therefore & p \vee s \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{rl} & \sim p \vee q \\ & r \vee \sim q \\ & p \\ & s \\ \hline \therefore & r \vee s \end{array}$$

6. Установите правильность следующих умозаключений, используя метод, альтернативный методу таблиц истинности:

а)
$$\begin{array}{rl} & s \vee t \\ & t \to r \\ & s \to w \\ \hline \therefore & r \vee w \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ & r \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \sim q \to \sim s \\ & s \to t \\ & t \vee q \\ \hline \therefore & p \vee s \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{rl} & \sim p \vee q \\ & r \vee \sim q \\ & p \\ & s \\ \hline \therefore & r \vee s \end{array}$$

7. Покажите правильность следующих умозаключений, используя правила вывода и эквивалентные высказывания:

а)
$$\begin{array}{rl} & \sim(s \wedge t) \\ & \sim w \to t \\ \hline \therefore & s \to w \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \sim r \to \sim q \\ & \sim r \\ \hline \therefore & \sim p \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{rl} & \sim(\sim p \vee q) \\ & \sim z \to \sim s \\ & (p \wedge \sim q) \to s \\ & \sim z \vee r \\ \hline \therefore & r \end{array}$$

г)
$$\begin{array}{rl} & \sim x \to \sim w \\ & (x \vee \sim w) \to z \\ & \sim p \to \sim z \\ & p \to (\sim r \vee \sim s) \\ \hline \therefore & \sim r \vee \sim s \end{array}$$

8. Докажите, что логическая эквивалентность двух высказываний означает, что эквиваленция двух высказываний есть тавтология. Иными словами, для высказываний p и q докажите, что

$$p \equiv q$$

означает то же самое, что и

$$p \leftrightarrow q \text{ — } \textit{тавтология}.$$

Вслед за этим докажите, что последнее утверждение эквивалентно утверждению:

$$\textit{как } p \to q, \textit{ так и } q \to p \textit{ являются тавтологиями.}$$

В случае, когда импликация $p \to q$ есть тавтология, говорят, что p имеет следствием q, и часто записывают это как $p \Rightarrow q$.

9. Найдите среди указанных ниже выражений тавтологии:

а) $p \to (p \wedge q)$;

б) $p \to (p \vee q)$;

в) $(p \to q) \to (q \to p)$;

г) $((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p)$;

д) $((p \to q) \wedge q) \to p)$.

1.5. ПОЛНОТА В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Кроме использования в логике, одно из важных применений таблиц истинности состоит в конструировании коммутационных схем. Прежде, чем приступить к изучению коммутационных схем, мы рассмотрим вопрос о минимальном количестве логических связок, необходимых для выражения любого высказывания, образованного с помощью определенных нами выше логических связок. Известно, что $p \leftrightarrow q$ можно выразить как $(p \to q) \wedge (q \to p)$, так что использовать $\leftrightarrow$ удобно, но не необходимо. К тому же $p \veebar q$ эквивалентно

$$(p \wedge {\sim}q) \vee ({\sim}\, p \wedge q)\,.$$

Также $p \to q$ эквивалентно ${\sim}p \vee q$, поэтому нет необходимости использовать $\to$, если применяется $\sim$ и $\vee$. Кроме того, $p \wedge q$ эквивалентно ${\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$ и $p \vee q$ эквивалентно ${\sim}({\sim}p \wedge {\sim}q)$. Следовательно, любое высказывание может быть выражено через пару связок $\sim$ и $\wedge$ или $\sim$ и $\vee$, причем в любом случае необходимы обе связки. Однако существуют две связки, обладающие тем свойством, что любое высказывание может быть выражено с использованием только одной из них. Эти связки: $\mid$ — так называемый ***штрих Шеффера*** и $\downarrow$ — так называемая ***стрелка Пирса***. Свои названия эти связки получили в честь математиков Г.Шеффера и Ч.Пирса. Этим связкам соответствуют таблицы истинности

Случай	p	q	$p \mid q$
1	T	T	F
2	T	F	T
3	F	T	T
4	F	F	T

Случай	p	q	$p \downarrow q$
1	T	T	F
2	T	F	F
3	F	T	F
4	F	F	T

Для того, чтобы показать, что любую связку можно заменить связкой $\mid$, достаточно показать это для пар связок $\sim$ и $\wedge$ или $\sim$ и $\vee$, поскольку возможность выразить любую связку одной из этих пар уже показана. Эквивалентность $p \mid p$ и ${\sim}p$ устанавливается при помощи следующей таблицы истинности:

Случай	p	q	p	$\mid$	p
1	T	T	T	F	T
2	T	F	T	F	T
3	F	T	F	T	F
4	F	F	F	T	F
				$*$	

Точно так же таблица

Случай	p	q	$(p$	$\mid$	$p)$	$\mid$	$(q$	$\mid$	$q)$
1	T	T	T	F	T	T	T	F	T
2	T	F	T	F	T	T	F	T	F
3	F	T	F	T	F	T	T	F	T
4	F	F	F	T	F	F	F	T	F
						$*$			

показывает, что $(p \mid p) \mid (q \mid q)$ эквивалентно $p \vee q$. Можно также показать, что $(p \mid q) \mid (p \mid q)$ эквивалентно $p \wedge q$.

Таким образом, если показать, что $\sim$ и $\wedge$ или $\sim$ и $\vee$ можно выразить, используя только $\downarrow$, тогда и любую связку можно выразить, используя лишь $\downarrow$. Предоставляем читателю показать, что $p \downarrow p$ эквивалентно $\sim p$, $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ эквивалентно $p \wedge q$, а $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ эквивалентно $p \vee q$. Заметим, что $p \mid q$ эквивалентно $\sim(p \wedge q)$, а $p \downarrow q$ эквивалентно $\sim(p \vee q)$. Поэтому в дальнейшем связка $\mid$ будет называться ***не-и***, а связка $\downarrow$ будет называться ***не-или***.

Допустим, что задана произвольная таблица истинности. Существует простой способ найти высказывание, которому она соответствует. Например, предположим, что имеется таблица истинности

Случай	p	q	
1	T	T	T
2	T	F	T
3	F	T	F
4	F	F	T

Известно, что $p \wedge q$ истинно в случае 1 и ложно во всех остальных случаях. Аналогично, $p \wedge \sim q$ истинно только в случае 2, $\sim p \wedge q$ истинно только в случае 3, а $\sim p \wedge \sim q$ истинно только в случае 4. Пусть высказывание должно быть истинным точно в указанных нами случаях. Если для каждого такого случая (строки таблицы) выбрать высказывание, которое истинно только в этом случае, и связать эти высказывания связкой $\vee$, то мы получим высказывание, истинное только в требуемых случаях (строках). В приведенном выше примере рассматриваемая таблица истинности соответствует высказыванию

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)\,.$$

В случае таблиц истинности с тремя переменными имеем аналогичную ситуацию. Для каждой строки следующей таблицы приведено высказывание, истинное только для этой строки.

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	$p \wedge q \wedge r$
2	T	T	F	$p \wedge q \wedge \sim r$
3	T	F	T	$p \wedge \sim q \wedge r$
4	T	F	F	$p \wedge \sim q \wedge \sim r$
5	F	T	T	$\sim p \wedge q \wedge r$
6	F	T	F	$\sim p \wedge q \wedge \sim r$
7	F	F	T	$\sim p \wedge \sim q \wedge r$
8	F	F	F	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

Заметьте, что если в какой-либо строке переменная имеет ложное значение, то в соответствующем высказывании она использована с отрицанием. Если требуется построить высказывание, соответствующее конкретной таблице истинности, необходимо выбрать выражения, соответствующие случаям (строкам), где высказывание истинно, и соединить их связкой $\vee$. Например, построение высказывания с таблицей истинности

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	T
2	T	T	F	T
3	T	F	T	F
4	T	F	F	F
5	F	T	T	T
6	F	T	F	F
7	F	F	T	F
8	F	F	F	T

дает высказывание

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge {\sim}r) \vee ({\sim}p \wedge q \wedge r) \vee ({\sim}p \wedge {\sim}q \wedge {\sim}r)\,.$$

Построение высказывания с таблицей

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	F
2	T	T	F	T
3	T	F	T	T
4	T	F	F	F
5	F	T	T	F
6	F	T	F	T
7	F	F	T	F
8	F	F	F	F

дает высказывание

$$(p \wedge q \wedge {\sim}r) \vee (p \wedge {\sim}q \wedge r) \vee ({\sim}p \wedge q \wedge {\sim}r)\,.$$

Такая форма выражения высказывания называется ***дизъюнктивной нормальной формой***. Выражения $p \wedge q \wedge {\sim}r$, $p \wedge {\sim}q \wedge r$ и ${\sim}p \wedge q \wedge {\sim}r$ называются ***элементарными конъюнкциями***. Дадим более точное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ — простые высказывания. Назовем выражение $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \cdots \wedge x_n$, в котором $x_i = p_i$ или $x_i = {\sim}p_i$, ***элементарной конъюнкцией***. Выражение, представляющее собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций, называется ***дизъюнктивной нормальной формой***, так что если $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ есть элементарные конъюнкции, тогда $m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee \cdots \vee m_n$ есть дизъюнктивная нормальная форма.

Хотя любое высказывание может быть выражено в дизъюнктивной нормальной форме, эта форма высказывания не является простейшей. Карты Карно, которым посвящен следующий раздел, как раз позволяют упростить выражение высказывания в дизъюнктивной нормальной форме.

Действуя по той же схеме, мы замечаем, что $p \vee q \vee r$ ложно, только когда p, q и r ложны. Вообще, в таблице

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	
1	T	T	T	$\sim p \vee \sim q \vee \sim r$
2	T	T	F	$\sim p \vee \sim q \vee r$
3	T	F	T	$\sim p \vee q \vee \sim r$
4	T	F	F	$\sim p \vee q \vee r$
5	F	T	T	$p \vee \sim q \vee \sim r$
6	F	T	F	$p \vee \sim q \vee r$
7	F	F	T	$p \vee q \vee \sim r$
8	F	F	F	$p \vee q \vee r$

каждое выражение ложно в строке, где оно расположено, и истинно в любой другой строке. Если требуется найти высказывание, обладающее данной таблицей истинности, зная все случаи (строки), где в таблице истинности стоит ложное значение, то используются высказывания, каждое из которых ложно только в соответствующей строке, и все эти высказывания объединяются связкой $\wedge$. Например, таблице истинности вида

Случай	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	
1	T	T	T	T
2	T	T	F	T
3	T	F	T	F
4	T	F	F	F
5	F	T	T	T
6	F	T	F	F
7	F	F	T	F
8	F	F	F	T

соответствует высказывание

$$(\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r)\,.$$

Такая форма выражения высказывания называется ***конъюнктивной нормальной формой***. Выражения $\sim p \vee q \vee \sim r$, $\sim p \vee q \vee r$, $p \vee \sim q \vee r$ и $p \vee q \vee \sim r$ носят название ***элементарных дизъюнкций***. Теперь дадим более формальное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ — простые высказывания. Назовем выражение $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_n$,в котором $x_i = p_i$ или $\sim p_i$, ***элементарной дизъюнкцией***.

Выражение, представляющее собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций, называется ***конъюнктивной нормальной формой***, так что если $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ — элементарные дизъюнкции, то $m_1 \wedge m_2 \wedge m_3 \wedge \ldots \wedge m_n$ есть конъюнктивная нормальная форма.

■ УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя таблицы истинности, докажите, что

а) $p \downarrow p$ эквивалентно $\sim p$;

б) $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ эквивалентно $p \wedge q$;

в) $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ эквивалентно $(p \vee q)$.

2. Найдите высказывания, которым отвечают следующие таблицы истинности:

а)

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	T
2	T	T	F	T
3	T	F	T	F
4	T	F	F	F
5	F	T	T	F
6	F	T	F	T
7	F	F	T	F
8	F	F	F	T

б)

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	T
2	T	T	F	F
3	T	F	T	T
4	T	F	F	F
5	F	T	T	F
6	F	T	F	T
7	F	F	T	F
8	F	F	F	T

в)

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	T
2	T	T	F	F
3	T	F	T	T
4	T	F	F	T
5	F	T	T	F
6	F	T	F	F
7	F	F	T	F
8	F	F	F	T

3. Найдите высказывания, которым отвечают следующие таблицы истинности:

а)

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	F
2	T	T	F	T
3	T	F	T	T
4	T	F	F	T
5	F	T	T	F
6	F	T	F	F
7	F	F	T	F
8	F	F	F	T

б)

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	F
2	T	T	F	F
3	T	F	T	F
4	T	F	F	F
5	F	T	T	T
6	F	T	F	T
7	F	F	T	F
8	F	F	F	T

в)

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	T
2	T	T	F	F
3	T	F	T	T
4	T	F	F	T
5	F	T	T	F
6	F	T	F	F
7	F	F	T	T
8	F	F	F	F

1.6. КАРТЫ КАРНО

Для простых высказываний p_1, p_2, p_3, $\ldots$ и p_n существует 2^n различных элементарных конъюнкций. (Это будет показано в главе 8.) Например, для высказываний p и q элементарными конъюнкциями будут $p \wedge q$, $p \wedge \sim q$, $\sim p \wedge q$ и $\sim p \wedge \sim q$. ***Карта Карно*** — это таблица, каждый элемент которой является элементарной конъюнкцией. Например, для высказываний p и q карта Карно должна иметь вид, изображенный на рис. 1.1, а на рис. 1.2 внутри прямоугольников представлены соответствующие элементарные конъюнкции.

	q	$\sim q$
p		
$\sim p$		

Рис. 1.1

	q	$\sim q$
p	$p \wedge q$	$p \wedge \sim q$
$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$

Рис. 1.2

Для представления картой Карно высказывания, записанного в дизъюнктивной нормальной форме, необходимо поместить $\times$ в прямоугольниках, соответствующих элементарным конъюнкциям. Например, высказыванию

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

соответствует карта Карно, изображенная на рис. 1.3.

	q	$\sim q$
p	$\times$	
$\sim p$		$\times$

Рис. 1.3

	q	$\sim q$
p	$\times$	$\times$
$\sim p$		

Рис. 1.4

Заметим, что если высказыванию соответствует карта Карно с двумя соседствующими в строке или в столбце $\times$, тогда выражение можно упростить, сведя две элементарные конъюнкции к одной, содержащей на одну компоненту меньше (т.е. либо p, либо q не будут присутствовать в выражении). Например, высказывание $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$, которому соответствует карта Карно, изображенная на рис. 1.4, эквивалентно высказыванию p, так как $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p \wedge (q \vee \sim q) \equiv p \wedge T \equiv p$.

	q		$\sim q$	
p				
$\sim p$				
	r	$\sim r$		r

Рис. 1.5

Карта Карно для p, q и r может иметь вид, изображенный на рис. 1.5, а на рис. 1.6 в прямоугольниках внутри представлены элементарные конъюнкции.

	q		$\sim q$	
p	$p \wedge q \wedge r$	$p \wedge q \wedge \sim r$	$p \wedge \sim q \wedge \sim r$	$p \wedge \sim q \wedge r$
$\sim p$	$\sim p \wedge q \wedge r$	$\sim p \wedge q \wedge \sim r$	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$	$\sim p \wedge \sim q \wedge r$
	r	$\sim r$		r

Рис. 1.6

Следовательно, высказыванию

$$(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$$

будет соответствовать карта Карно, изображенная на рис. 1.7.

	q		$\sim q$	
p		×		×
$\sim p$		×		
	r	$\sim r$		r

Рис. 1.7

Как и прежде, поскольку два знака соседствуют, две элементарные конъюнкции могут быть сведены к одной, содержащей на одну из компонент p, q и r меньше. В данном случае $(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$ сводится к $(q \wedge \sim r)$, так что выражение принимает вид $(q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r)$.

В случае, когда четыре значка расположены в прямоугольнике рядом, как показано на рис. 1.8

	q		$\sim q$	
p		×	×	
$\sim p$		×	×	
	r	$\sim r$		r

Рис. 1.8

или на рис. 1.9,

	q	q	$\sim q$	$\sim q$
p	×	×	×	×
$\sim p$				
	r	$\sim r$	$\sim r$	r

Рис. 1.9

тогда четыре элементарные конъюнкции, отмеченные значками, могут быть сведены к одному члену, содержащему только одну из компонент p, q и r. Например, первая карта Карно представляет

$$(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)\,,$$

что сводится к $\sim r$.

Вторая карта Карно представляет выражение

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r)\,,$$

что может быть сведено к p.

Поскольку r появляется на обоих концах карты Карно, ее можно “скрутить” и считать, что четыре значка на карте Карно образуют прямоугольник из четырех значков (см. рис. 1.10), поэтому выражение

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$$

сводится просто к r.

	q	q	$\sim q$	$\sim q$
p	×			×
$\sim p$	×			×
	r	$\sim r$	$\sim r$	r

Рис. 1.10

Выражение

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r)\,,$$

представленное на рис. 1.11, может быть преобразовано к $q \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r)$ на основе правостороннего блока из четырех значков. Более того, благодаря наличию блока из двух значков в середине первой строки, его можно еще больше упростить, приведя к виду $q \vee (p \wedge \sim r)$.

	q	q	$\sim q$	$\sim q$
p	×	×	×	
$\sim p$	×	×		
	r	$\sim r$	$\sim r$	r

Рис. 1.11

Перечислим четыре последовательных шага при использовании карты Карно:

1. Для каждой элементарной конъюнкции обозначьте на карте соответствующий прямоугольник.
2. Покройте знаки, используя, по возможности, несколько прямоугольных блоков.
3. Используйте блоки, максимальные по величине, не меняя числа блоков.
4. Оцените блоки с соответствующими высказываниями, которые описывают их, и объедините эти высказывания символом $\vee$.

Проиллюстрируем этот процесс путем построения карты Карно для четырех высказываний p, q, r и s, изображенной на рис. 1.12, где во внутренних прямоугольниках представлены элементарные конъюнкции, составленные из тех высказываний, расположенных на краях, которые принадлежат строке и столбцу соответствующих прямоугольников. Например, крайние высказывания, соответствующие второй строке и третьему столбцу, есть p, $\sim q$, $\sim r$ и $\sim s$, что порождает элементарную конъюнкцию $p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s$.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
&(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \sim r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \sim s) \vee \\
&\vee (p \wedge q \wedge \sim r \wedge \sim s) \vee (\sim p \wedge q \wedge r \wedge \sim s) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r \wedge \sim s) \vee \\
&\vee (\sim p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r \wedge s) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge s) \vee \\
&\vee (p \wedge \sim q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s).
\end{aligned}$$

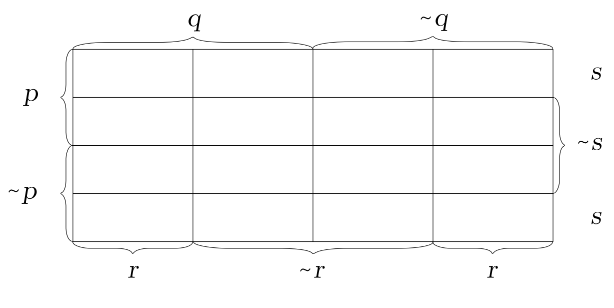


Рис. 1.12

Размещая соответствующие значки в карте Карно, получаем карту, изображенную на рис. 1.13, которую можно покрыть восьмикратным, четырехкратным и двукратным блоками. Восьмикратный блок можно описать, используя только одну из компонент p, q, r или s. В данном случае восьмикратный блок описывает q. Четырехкратный блок можно описать, используя только два простых высказывания. В данном случае этот блок можно описать, используя $p \wedge s$. Двукратный блок можно описать, используя три простых высказывания. В данном случае это $p \wedge \sim q \wedge r$. Следовательно, исходное высказывание можно упростить и привести к виду $q \vee (p \wedge s) \vee (p \wedge \sim q \wedge r)$. Поскольку r находится на обоих концах строки, а s находится на обоих концах столбца, “скручивание” карты Карно объединяет эти

	q	q	$\sim q$	$\sim q$	
p	×	×	×	×	s
p	×	×		×	$\sim s$
$\sim p$	×	×			$\sim s$
$\sim p$	×	×			s
	r	$\sim r$	$\sim r$	r	

Рис. 1.13

случаи, так что верхний край можно считать прилегающим к нижнему, а левый — прилегающим к правому.

Например, четырехкратный блок на карте Карно на рис. 1.14 можно описать посредством $r \wedge s$.

	q	q	$\sim q$	$\sim q$	
p	×			×	s
p					$\sim s$
$\sim p$					$\sim s$
$\sim p$	×			×	s
	r	$\sim r$	$\sim r$	r	

Рис. 1.14

■ УПРАЖНЕНИЯ

1. Упростите высказывания, выраженные следующими картами Карно:

а)

	q	q	$\sim q$	$\sim q$
p	×		×	×
$\sim p$	×			×
	r	$\sim r$	$\sim r$	r

б)

	q	q	$\sim q$	$\sim q$	
p	×			×	s
p		×	×	×	$\sim s$
$\sim p$					$\sim s$
$\sim p$	×			×	s
	r	$\sim r$	$\sim r$	r	

в)

	q		$\sim q$		
p		×	×		s
p		×	×	×	$\sim s$
$\sim p$				×	$\sim s$
$\sim p$		×	×		s
	r	$\sim r$		r	

2. Упростите высказывания, выраженные следующими картами Карно:

а)

	q		$\sim q$	
p	×		×	
$\sim p$	×		×	×
	r	$\sim r$		r

б)

	q		$\sim q$		
p		×	×		s
p	×			×	$\sim s$
$\sim p$	×			×	$\sim s$
$\sim p$		×	×		s
	r	$\sim r$		r	

в)

	q		$\sim q$		
p	×	×	×	×	s
p	×			×	$\sim s$
$\sim p$	×			×	$\sim s$
$\sim p$	×	×	×	×	s
	r	$\sim r$		r	

3. Используйте карты Карно для упрощения следующих выражений:

а) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee$
$\vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)$;

б) $(p \wedge q \wedge \sim r \wedge s) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \sim r \wedge \sim s) \vee$
$\vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r \wedge \sim s) \vee$
$\vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r \wedge s) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge s) \vee (\sim p \wedge q \wedge r \wedge \sim s) \vee$
$\vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s)$;

в) $(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (\sim p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s) \vee$
$\vee (p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s) \vee$
$\vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s)$.

4. Используйте карты Карно для упрощения следующих выражений:

а) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee$
$\vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$;

б) $(p \wedge q \wedge \sim r \wedge s) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge s) \vee (\sim p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee$
$\vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r \wedge s) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge s) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r \wedge s)$;

в) $(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \sim s) \vee (\sim p \wedge q \wedge r \wedge \sim s) \vee$
$\vee (p \wedge \sim q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s)$.

1.7. КОММУТАЦИОННЫЕ СХЕМЫ

Высказывания, соответствующие коммутационным (релейно-контактным) схемам, принято выражать в системе обозначений булевой алгебры, которая будет введена в разделе 2.4. Поэтому, прежде чем перейти к изучению коммутационных схем, мы перейдем от обозначений, принятых в логике, к булевой записи. Символы $\wedge$, $\vee$ и $\sim$ заменяются, соответственно, на $\cdot$, $+$ и $'$. Таким образом, $(p \wedge q) \vee \sim r$ превращается в $(p \cdot q) + r'$, а

$$(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$$

принимает вид

$$(p \cdot q \cdot r') + (p \cdot q' \cdot r) + (p' \cdot q \cdot r')\,.$$

Как и в обычной алгебре, знак произведения, как правило, опускается, и предполагается, что произведение выполняется перед сложением, поэтому приведенное выше выражение можно переписать в виде

$$pqr' + pq'r + p'qr'\,.$$

В таблицах истинности T заменяется на 1, а F на 0, так что таблица истинности

Случай	p	q	r	p	$\vee$	$((\sim$	$q)$	$\wedge$	$r)$
1	T	T	T	T	T	F	T	F	T
2	T	T	F	T	T	F	T	F	F
3	T	F	T	T	T	T	F	T	T
4	T	F	F	T	T	T	F	F	F
5	F	T	T	F	F	F	T	F	T
6	F	T	F	F	F	F	T	F	F
7	F	F	T	F	T	T	F	T	T
8	F	F	F	F	F	T	F	F	F

преобразуется в таблицу

Случай	p	q	r	p	$+$	$(q'$	$\cdot$	$r)$
1	1	1	1	1	1	0	0	1
2	1	1	0	1	1	0	0	0
3	1	0	1	1	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	1	0	0
5	0	1	1	0	0	0	0	1
6	0	1	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	1	1	1	1
8	0	0	0	0	0	1	0	0

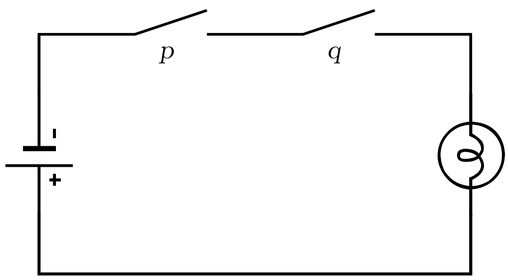


Рис. 1.15

В 1938 г. Клод Шеннон заметил связь между таблицами истинности и электрическими цепями. Рассмотрим схему переключения на рис. 1.15, которая состоит из источника питания (рис. 1.16) и электрической лампочки (рис. 1.17).

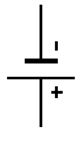


Рис. 1.16

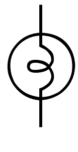


Рис. 1.17

Присвоим значение 1 переключателям p и q, если они замкнуты (т.е. электрический ток проходит через них). В противоположной ситуации присвоим им значение 0. Присвоим значение 1 схеме, когда лампочка светится (т.е. электрический ток через нее проходит). Заметим, что при последовательном соединении элементов цепи p и q, как это имеет место на приведенной выше схеме, лампочка загорается, и значение схемы становится равным 1 только в случае, когда оба переключателя замкнуты, т.е. и p, и q имеют значение 1. Таким образом, схема соответствует высказыванию $p \cdot q$. Такое расположение переключателей называется логическим элементом ***p и q***, или ***схемой логического умножения***. Этот логический элемент обозначается символом, изображенным на рис. 1.18.

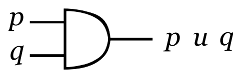


Рис. 1.18

Теперь рассмотрим схему переключения, показанную на рис. 1.19, где переключатели p и q соединены параллельно.

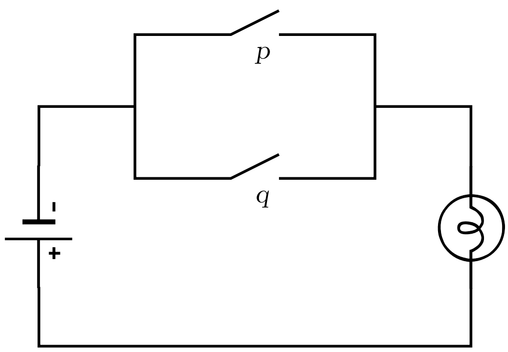


Рис. 1.19

Отметим, что теперь лампочка загорается, и значение схемы становится равным 1, когда один из двух переключателей p или q замкнут, т.е. либо значение $p = 1$, либо $q = 1$ (либо оба они равны 1). Эта схема соответствует высказыванию $p + q$. Такое расположение выключателей называется логическим элементом ***p или q***, или ***схемой логического сложения***. Этот логический элемент обозначается символом, изображенным на рис. 1.20.

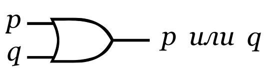


Рис. 1.20

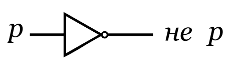


Рис. 1.21

Предположим, имеется схема (мы не будем пытаться ее изобразить), с одним переключателем p, который обладает таким свойством, что лампочка загорается тогда и только тогда, когда p разомкнут. Следовательно, схема имеет значение 1, когда p имеет значение 0, и имеет значение 0, когда p имеет значение 1. Эта схема соответствует p', а соответствующий логический элемент называется логическим элементом ***не***, или ***инвертором***. Логический элемент *не* обозначается символом, изображенным на рис. 1.21.

ПРИМЕР 1.7. Схема на рис. 1.22 содержит логический элемент *p и q*, за которым следует инвертор, так что схема соответствует выражению $(p \cdot q)'$. Заметим, что инвертор отрицает всю предшествующую ему схему.

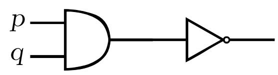


Рис. 1.22 □

ПРИМЕР 1.8. Схема на рис. 1.23 содержит соединение логического элемента *p или q* с логическим элементом *не r* посредством логической схемы умножения. Следовательно, она соответствует выражению $(p + q) \cdot r'$.

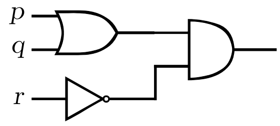


Рис. 1.23 □

ПРИМЕР 1.9. Булево выражение, соответствующее схеме на рис. 1.24, имеет вид $(p' \cdot q) + (p \cdot r')'$.

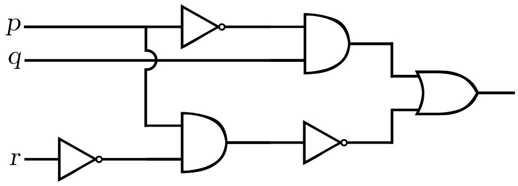


Рис. 1.24 □

ПРИМЕР 1.10. Коммутационная схема, соответствующая выражению $(p' \cdot q) + r$, показана на рис. 1.25.

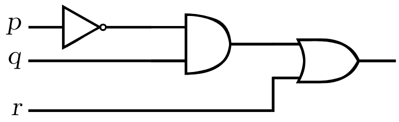


Рис. 1.25 □

ПРИМЕР 1.11. Коммутационная схема, соответствующая выражению $((p + q)' \cdot (p + r)) + r'$, показана на рис. 1.26.

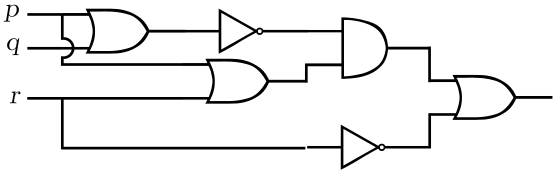


Рис. 1.26 □

ПРИМЕР 1.12. Построим схему трехклавишного переключателя, при помощи которого свет включается тремя различными двупозиционными переключателями. Рассмотрим сначала соответствующее булево выражение. Свет должен включаться, когда все три переключателя замкнуты, т.е. необходимо иметь pqr. Если один из переключателей разомкнут, то свет должен быть выключен. Однако, если разомкнуть другой переключатель, то свет должен включиться. Следовательно, искомое выражение имеет вид $pqr + pq'r' + p'q'r + p'qr'$. Для простоты, вместо схемы, представленной на рис. 1.27, для выражения pqr мы будем использовать схему, изображенную на рис. 1.28.

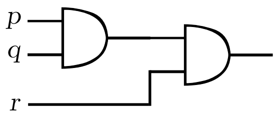


Рис. 1.27

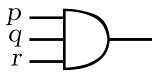


Рис. 1.28

А для выражения $p + q + r$ вместо схемы на рис. 1.29 мы будем использовать схему, показанную на рис. 1.30.

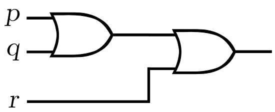


Рис. 1.29

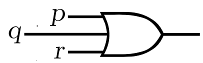


Рис. 1.30

Тогда искомая схема будет такой, как показано на рис. 1.33. □

Ранее было отмечено, что штрих Шеффера, обозначаемый через $|$, имеет ту же таблицу истинности, что и $(pq)'$ (в булевой записи), поэтому мы и упоминали его как логическую связку ***не-и***. В свою очередь, стрелка Пирса, обозначенная $\downarrow$, имеет ту же самую таблицу истинности, что и $(p+q)'$, поэтому она упоминалась как связка ***не-или***. Логические элементы *не-и* и *не-или* обозначаются символами, показанными на рис. 1.31 и 1.32.

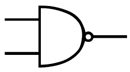


Рис. 1.31

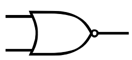


Рис. 1.32

Выражению $(p|q) \downarrow (p|r)$ соответствует схема, изображенная на рис. 1.34.

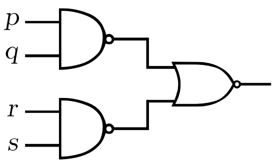


Рис. 1.34

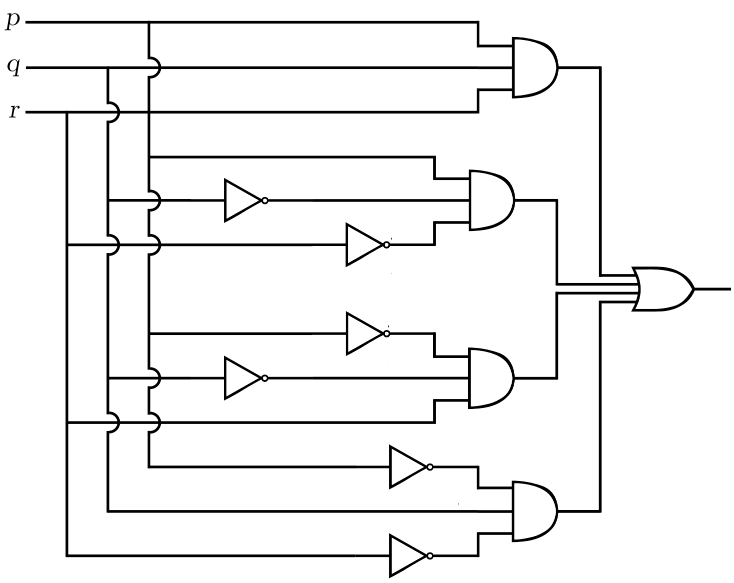


Рис. 1.33

ПРИМЕР 1.13. ***Полусумматор*** находит сумму двух двоичных чисел 1 и 0 согласно таблице сложения:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Свое название полусумматор получил в связи с тем, что при сложении двоичных чисел с более чем одним разрядом (что станет предметом обсуждения в последующей главе) суммируются только низшие разряды, поскольку нет возможности учесть в сумме число, которое "переносится". Для удобства суммирования одноразрядных двоичных чисел таблица, приведенная выше, преобразована к виду

+	0	1
0	00	01
1	01	10

Пусть p и q обозначают числа, которые требуется сложить, а d_1, d_0 — первый и второй разряды суммы, тогда приходим к следующим таблицам истинности:

Случай	p	q	d_0
1	1	1	0
2	1	0	1
3	0	1	1
4	0	0	0

Случай	p	q	d_1
1	1	1	1
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	0	0

Следовательно, $d_0 \equiv pq' + p'q$, что эквивалентно $(p+q)\cdot(pq)'$. Это можно показать, используя таблицы истинности или правило эквивалентности (см. упражнения). Также $d_1 \equiv pq$. Коммутационная схема для полусумматора приведена на рис. 1.35.

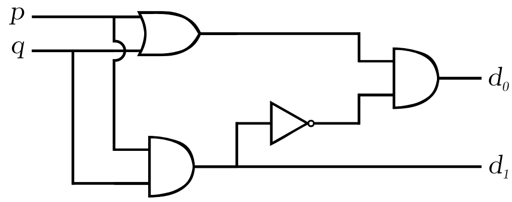


Рис. 1.35

Поскольку полусумматор дает сумму двух чисел, он обозначается символом, изображенным на рис. 1.36.

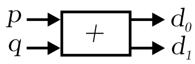


Рис. 1.36 □

ПРИМЕР 1.14. ***Полный сумматор*** складывает три одноразрядных двоичных числа. Следовательно, он может сложить два двоичных числа с тем числом, которое "переносится". Пока необходимо рассматривать это как сложение трех одноразрядных двоичных чисел. Если предположить, что p, q и r обозначают числа, которые необходимо сложить, а $d_1^{\#}, d_0^{\#}$ — первый и второй разряды их суммы, получаем следующие таблицы истинности:

Случай	p	q	r	$d_1^{\#}$	$d_0^{\#}$
1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	0
3	1	0	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	0	1	1	1	0
6	0	1	0	0	1
7	0	0	1	0	1
8	0	0	0	0	0

$d_0^{\#}$ действительно есть результат сложения d_0 с r, где d_0 — второй разряд суммы p и q. Следовательно, его схему легко описать. Значение $d_1^{\#}$ проще получить, используя приведенную выше таблицу истинности

$$d_1^{\#} \equiv pqr + pqr' + pq'r + p'qr\,.$$

Воспользовавшись картой Карно для выражения $d_1^{\#}$, получаем следующую карту:

	q	q	$\sim q$	$\sim q$
p	×	×		×
$\sim p$	×			
	r	$\sim r$	$\sim r$	r

Таким образом, $d_1^{\#} \equiv pq + pr + qr \equiv pq + (p + q)r$, поэтому схема может быть приведена к виду, показанному на рис. 1.37. (Более подробно эта схема представлена на рис. 1.39, приведенном ниже.)

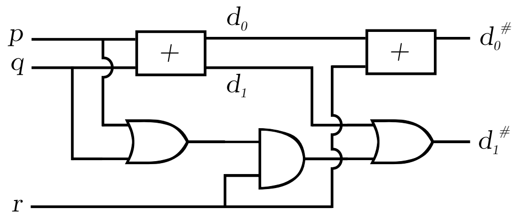


Рис. 1.37

Поскольку полный сумматор складывает три числа, он будет обозначаться символом, показанным на рис. 1.38.

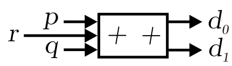


Рис. 1.38

□

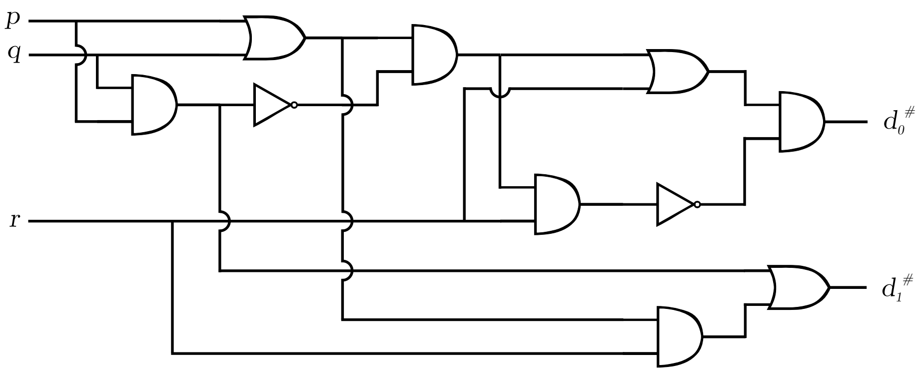


Рис. 1.39

■ УПРАЖНЕНИЯ

1. Перепишите следующие высказывания в обозначениях булевой алгебры:

а) $(p \wedge q) \wedge (q \vee \sim r)$;

б) $(q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee r) \wedge (q \vee \sim r \vee s)$;

в) $\sim(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r)$;

г) $\sim(\sim p \vee (q \wedge \sim r))$;

д) $(p \wedge r) \vee (p \wedge \sim q) \wedge (p \vee r \vee \sim s)$.

2. Перепишите следующие высказывания в обозначениях булевой алгебры:

а) $(p \vee q \vee {\sim}r) \wedge {\sim}(r \vee {\sim}q)$;

б) $({\sim}q \wedge r) \vee {\sim}(p \wedge r)$;

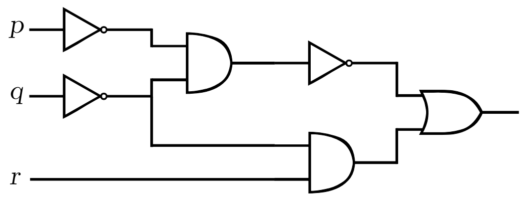
в) ${\sim}((p \wedge r) \vee {\sim}q)$;

г) $(p \wedge q \wedge r) \vee ({\sim}p \wedge q \wedge {\sim}r) \vee ({\sim}p \wedge q \wedge r) \vee ({\sim}p \wedge q \wedge {\sim}r)$;

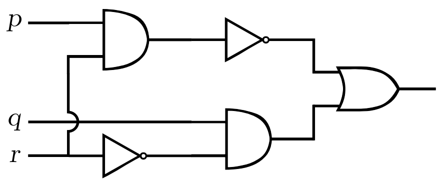
д) $(p \wedge {\sim}q \wedge {\sim}r \wedge s) \vee ({\sim}p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee ({\sim}p \wedge q \wedge {\sim}r \wedge s)$.

3. Приведите булевы выражения, соответствующие коммутационным схемам:

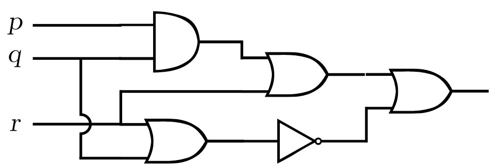
а)



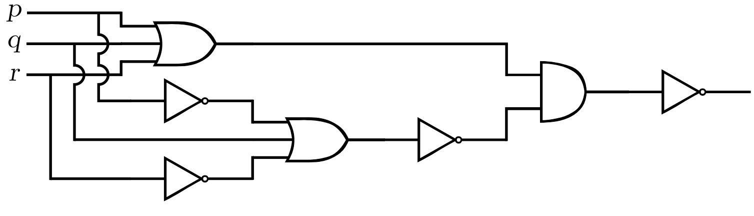
б)



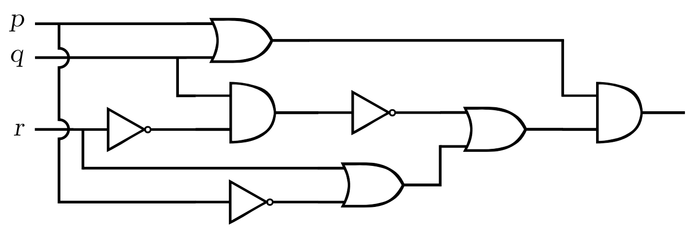
в)



г)

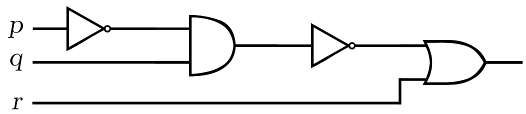


д)

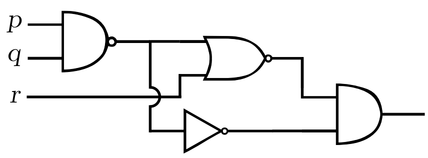


4. Приведите булевы выражения, соответствующие коммутационным схемам:

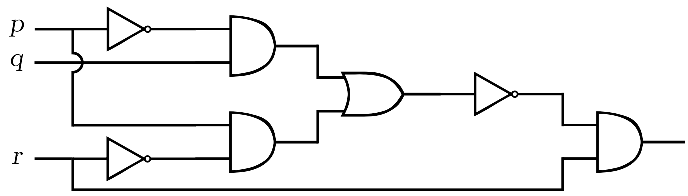
а)



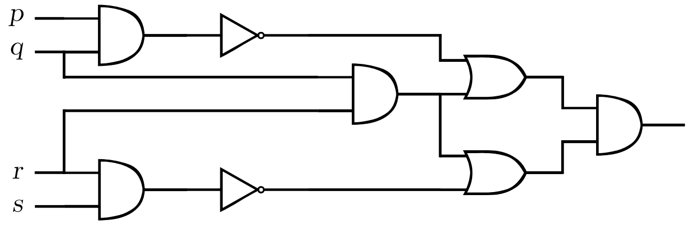
б)



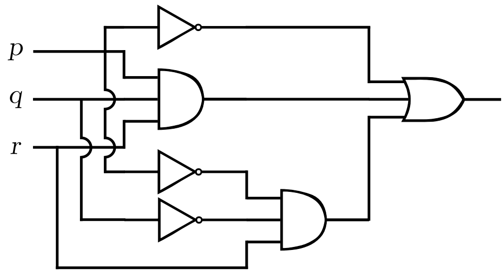
в)



г)



д)



5. Постройте коммутационные схемы, соответствующие булевым выражениям:

а) $(p' + q)(p + (qr))$;
б) $(pq') + ((qr') + (p'r))$;
в) $(q'r') + ((pq)'(q'r))$;
г) $(q(r + s))((p'q') + (qr'))$;
д) $(pq) + ((pq'r') + r)'$.

6. Постройте коммутационные схемы, соответствующие булевым выражениям:

а) $(pq')' + (qr)'$;
б) $((p + q)z)'$;
в) $((p'(q + p'r')) + (pq' + r)$;
г) $(p'q + (q'r))' + ps'$;
д) $((pq')' + (r's))(p + r')$.

7. Муниципальный совет состоит из пяти членов. Каждый член совета имеет для голосования кнопку “за” и кнопку “против”. Решение принимается, если за него проголосует большинство. Постройте коммутационную схему устройства, сигнализирующего о том, что решение принято, путем высвечивания индикатора. *Указание*: при построении схем используйте последовательное и параллельное соединение переключателей, как показано в начале раздела.

8. Муниципальный совет состоит из пяти членов, включая председателя совета. Каждый член совета имеет для голосования кнопку “за” и кнопку “против”. Решение принимается, если за него проголосует большинство. Председатель совета голосует только в том случае, если голоса “за” и “против” разделились поровну. Постройте коммутационную схему для определения принятия или непринятия решения путем высвечивания индикатора. *Указание*: при построении схем используйте последовательное и параллельное соединение переключателей, как показано в начале раздела.

9. Муниципальный совет состоит из пяти членов, включая председателя совета. Каждый член совета имеет для голосования кнопку “за” и кнопку “против”. Решение принимается, если за него проголосует большинство, исключая председателя, который имеет право вето. Постройте коммутационную схему для определения принятия или непринятия решения путем высвечивания индикатора.

10. Электрическая схема содержит три двупозиционных переключателя. Сконструируйте схему для включения и выключения любым переключателем.