Калинчук В.В.
Белянкова Т.И.

Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих сред

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 539.3
ББК 30.1
К 17

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 05-01-14064д

Калинчук В. В., Белянкова Т. И. **Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих сред.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 272 с. — ISBN 5-9221-0668-6.

На основе последовательной линеаризации определяющих соотношений нелинейной механики электроупругих сред развита линеаризованная теория контактного взаимодействия полуограниченных предварительно напряженных пьезоактивных тел. Показаны особенности постановки краевых задач с использованием лагранжевых и эйлеровых координат, построены решения задач о колебаниях пьезоактивной среды с прямолинейными границами (слой, слоистое полупространство). Для этих типов сред выведены интегральные уравнения и исследованы их основные свойства. На основе анализа построенных решений выявлены закономерности влияния начальных напряжений на динамические процессы в пьезоактивных средах, изучены условия возникновения и возможности использования резонансных явлений для регистрации изменений начального напряженного состояния пьезоактивных деформируемых тел.

Для специалистов в области механики, физики, акустоэлектроники и приборостроения, неразрушающего контроля и дефектоскопии, студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Научное издание

КАЛИНЧУК Валерий Владимирович
БЕЛЯНКОВА Татьяна Ивановна

ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СРЕД

Редактор *Е.Н. Глебова*
Оригинал-макет: *Д.А. Воробьев*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 16.05.06. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 17. Уч.-изд. л. 18,5. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 5-9221-0668-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Монография посвящена развитию теории и разработке методов динамического контактного взаимодействия пьезоактивных полуограниченных тел при конечных (больших) начальных деформациях.

Машиностроение и приборостроение, ультразвуковая дефектоскопия и акустическая эмиссия, акустоэлектроника, фундаментостроение и сейсмостойкое строительство, сейсморазведка и геофизика, — далеко не полный перечень отраслей современной науки и техники, в которых проблема контактного взаимодействия твердых деформируемых тел играет важную, а в ряде случаев определяющую, роль. Достаточно полные обзоры работ по динамике контактного взаимодействия даны в монографиях [5, 12, 26, 27, 28, 33, 37, 46, 55 и др.].

Совершенствование методов расчета деталей и узлов машин и конструкций, потребность прогнозирования их ресурсной способности обуславливают необходимость учета начальных напряжений на стадии проектирования. Актуальной является проблема разработки теоретических и экспериментальных методов контроля напряженного состояния, оценки величины и характера начальных напряжений в деталях и элементах конструкций при эксплуатации.

Строгое описание процессов, проистекающих в твердом деформируемом теле при больших (конечных) деформациях представляет сложную проблему и требует привлечения определяющих соотношений нелинейной механики [36, 43, 52, 53 и др.]. В то же время множество процессов, происходящих в телах при больших начальных напряжениях, можно рассматривать в рамках линеаризованной теории наложения малых деформаций (динамических возмущений) на конечные деформации (начальное статическое состояние) в предположении, что возмущения малы. Такой подход позволяет за счет линеаризации нелинейных уравнений в окрестности статического состояния построить в той или иной мере последовательную теорию динамических процессов в преднапряженном теле. От последовательности линеаризации зависит степень адекватности описания влияния начальной деформации на динамические процессы в предварительно напряженных средах.

Сходные проблемы возникают при исследовании динамических процессов с участием пьезоактивных, подверженных большим начальным напряжениям тел. Последовательное изложение нелинейной механики электромагнитных сред дано в [54]. Изучение особенностей проявления начальных напряжений в электроупругой среде впервые, по-видимому, предпринято в работе R. N. Thurston, K. Brugger [100]. Последовательное построение линеаризованной теории динамических процессов в преднапряженной электроупругой среде в условиях действия внешних электростатических полей, основанное на линеаризации нелинейных уравнений электроупругости, дали J. C. Baumhauer, H. F. Tiersten [71]. В работах [71, 76, 78, 87, 90, 97–105, 109, 110 и др.] при исследовании процессов распространения волн в различных кристаллах рассмотрены эффекты, связанные с учетом констант третьего порядка. Изучение влияния начальных напряжений на скорости поверхностных акустических волн и акустоупругие эффекты второго порядка предпринято в [56, 72, 76–80, 85–87, 89, 90, 92–94, 96, 98–100, 106, 110 и др.]. Влияние внешних электростатических полей на скорость поверхностных волн в пьезоэлектрической среде исследовалось в [38, 40–42, 68, 71 и др.]. Сочетание совместного воздействия механических напряжений и сильных начальных электрических полей на скорость поверхностных волн в пьезоэлектрической среде исследовалось в [71, 72]. Ряд выявленных в отмеченных выше работах закономерностей использован при разработке теоретических основ и экспериментальных методов определения нелинейных упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических констант различных кристаллов [73, 75, 78, 97, 99–101, 110].

В настоящей работе предпринято построение линеаризованной теории контактного взаимодействия полуограниченных, предварительно напряженных пьезоактивных тел. На основе использования материальной (лагранжевой) и пространственной (эйлеровой) форм описания нелинейных процессов проведена последовательная линеаризация определяющих соотношений нелинейной механики электромагнитной среды. Изучено влияние преднапряжений на класс симметрии различных типов пьезоэлектриков. Показаны особенности постановки краевых задач с использованием лагранжевых и эйлеровых координат, построены решения задач о колебаниях пьезоактивной среды с прямолинейными границами (слой, слоистое полупространство). Для этих типов сред построены интегральные уравнения, приведены их основные свойства.

Особое внимание уделено описанию эффективных методов решения интегральных уравнений и систем интегральных уравнений, возникающих при изучении динамики контактного взаимодействия пьезоактивных сред. В качестве таковых используются метод факторизации [5–7], развитый в ряде работ В. А. Бабешко, и метод фиктивного поглощения, предложенный В. А. Бабешко и развитый в цикле работ В. А. Бабешко и О. Д. Пряхиной [5, 13, 28, 62, 63 и др.]. Эффективность последнего была продемонстрирована при исследовании систем интегральных уравнений, возникающих в задачах контактного взаимодействия массивных электродов с различными средами типа слоя или пакета слоев [13, 28, 62, 63 и др.]. В работах [8–10] было предложено обобщение метода фиктивного поглощения к решению интегральных уравнений и систем интегральных уравнений динамических смешанных задач для слоисто-неоднородного полупространства. Эффективность метода была продемонстрирована при исследовании систем интегральных уравнений, возникающих в задачах контактного взаимодействия массивных тел с аналогичными типами электроупругих сред [24, 25, 29, 46, 47 и др.].

Основным достоинством методов факторизации и фиктивного поглощения является высокая степень точности учета динамических свойств среды, позволяющая исследовать тонкие вопросы влияния начальных напряжений на основные характеристики процесса контактного взаимодействия. Методы апробированы на широком круге конкретных задач контактного взаимодействия с участием различных пьезоактивных материалов. Выявлены закономерности влияния начальных напряжений на динамические процессы в пьезоактивных средах, изучены возможности использования резонансных явлений для регистрации изменений начального напряженного состояния пьезоактивных деформируемых тел.

В основу работы положены исследования, проведенные авторами в рамках выполнения исследовательских грантов РФФИ № 98-01-00401, 99-01-01015, 03-01-00694, РФФИ Р2003ЮГ (03-01-96527, 03-01-96537, 03-01-96662), РФФИ ННИО 04-01-00401, гранта Президента РФ (НШ–2107-2003.1).

Авторы выражают глубокую признательность академику РАН В. А. Бабешко за поддержку и постоянное внимание к работе.

Авторы благодарят А. С. Богомолова и В. А. Лыжова, взявших на себя труд в проведении цикла численных расчетов, Д. Н. Шейдакова за помощь в подготовке рукописи.

Авторы выражают благодарность И. А. Зайцевой и Ю. Е. Пузанову, любезно предоставившим ряд численных результатов.

Глава 1

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СРЕД

В настоящей главе приводится сводка основных сведений из нелинейной теории упругости и нелинейной механики электроупругих сред, необходимых для цельности изложения процесса линеаризации определяющих соотношений динамики предварительно напряженных электроупругих сред и для строгой постановки динамических задач. Эти сведения не претендуют на полноту. Последовательное изложение нелинейной теории упругости в отсутствие пьезоэффекта в полном объеме дано в фундаментальных работах [52, 53, 91 и др.]. Исчерпывающее изложение нелинейной механики электроупругих сред представлено в монографиях [54, 65, 92 и др.].

1.1. Основные положения нелинейной теории упругости

В нелинейной теории упругости, в отличие от классической (линейной), различают отсчетную v- и актуальную V-конфигурации (т. е. до и после действия поверхностных и массовых сил). Различие этих конфигураций заключается в способе задания радиус-векторов, определяющих положение материальной точки.

1.1.1. Системы координат Лагранжа и Эйлера. Введем систему материальных координат q_1, q_2, q_3 и каждой точке среды поставим в соответствие конкретные значения q_1, q_2, q_3, которые остаются неизменными в процессе деформирования. Положение материальной точки в отсчетной конфигурации задается радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{i}_s a_s(q_1, q_2, q_3)$ — непрерывной и требуемое число раз дифференцируемой вектор-функцией. Место этой же точки при движении среды задается радиус-вектором $\mathbf{R} = \mathbf{i}_s X_s(q_1, q_2, q_3, t)$ — также непрерывной и требуемое число раз дифференцируемой вектор-функцией. Этим определяются отсчетная и актуальная конфигурации и вводятся в рассмотрение система координат Лагранжа a_1, a_2, a_3 (лагранжевы координаты), связанная с отсчетной v-конфигурацией, и система координат Эйлера X_1, X_2, X_3 (эйлеровы координаты), связанная с актуальной V-конфигурацией. Определение ∇-оператора также зависит от выбранной конфигурации. Обозначим:

в v-конфигурации

$$\nabla_0 = \mathbf{r}_k \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{i}_m \frac{\partial a_m}{\partial q_k}, \tag{1.1.1}$$

в V-конфигурации

$$\nabla = \mathbf{R}_k \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad \mathbf{R}_k = \mathbf{i}_m \frac{\partial X_m}{\partial q_k}, \tag{1.1.2}$$

$\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{R}_k$ — векторы основного базиса в v- и V-конфигурациях соответственно. В рассмотрение вводятся также векторы взаимного базиса в этих конфигурациях:

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{i}_m \frac{\partial q_k}{\partial a_m}, \quad \mathbf{R}^k = \mathbf{i}_m \frac{\partial q_k}{\partial X_m}.$$

Справедливы соотношения:

$$\mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}_m = \mathbf{R}^k \cdot \mathbf{R}_m = \delta^k_m = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases},$$

$$\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_m = g_{km}, \;\; \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}^m = g^{km},$$

$$\mathbf{R}_k \cdot \mathbf{R}_m = G_{km}, \;\; \mathbf{R}^k \cdot \mathbf{R}^m = G^{km},$$

где g_{km}, g^{km}, G_{km}, G^{km} — компоненты метрических тензоров в соответствующих конфигурациях, δ^k_m — символ Кронекера.

З а м е ч а н и е 1.1. Нетрудно заметить, что если в качестве материальных координат q_1, q_2, q_3 использовать декартовы координаты a_1, a_2, a_3 и X_1, X_2, X_3 в естественной и актуальной конфигурациях соответственно, то базисные векторы в этих конфигурациях совпадут с базисными векторами декартовой системы координат:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}^k = \mathbf{r}_k = \mathbf{r}^k = \mathbf{i}_k = \mathbf{i}^k.$$

В ортонормированном базисе основной и взаимный базисы не различаются, метрические тензоры совпадают с единичными и имеет место соотношение:

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_m = \mathbf{i}^k \cdot \mathbf{i}^m = \delta_{km}.$$

Замечание 1.2. При конкретных исследованиях наряду с прямоугольной декартовой часто используются цилиндрическая и сферическая системы координат, базисные векторы которых подчинены условию ортогональности. В этом случае

$$\begin{gathered} \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_m = g_{km} = 0, \quad k \neq m, \\ \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k = H_k^2, \quad k = 1,\, 2,\, 3, \end{gathered}$$

где величины H_k называются коэффициентами Ламе.

Цилиндрическая система координат: в качестве материальных координат используются

$q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ (радиус, азимутальный угол, высота), причем $0 < r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Справедливы соотношения связи между цилиндрическими и декартовыми прямоугольными координатами:

$x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = z$.

Коэффициенты Ламе имеют вид:

$H_r = 1$, $H_\varphi = r$, $H_z = 1$.

Сферическая система координат: в качестве материальных координат используются:

$q_1 = R$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ (радиус, угол, отсчитываемый от северного полюса, и долгота), причем $0 < R < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Справедливы соотношения связи между сферическими и декартовыми прямоугольными координатами:

$x_1 = R\sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = R\sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = R\cos\theta$.

Коэффициенты Ламе имеют вид:

$H_R = 1$, $H_\theta = R$, $H_\varphi = R\sin\theta$.

1.1.2. Описание кинематики сплошной среды. Основными тензорами, характеризующими кинематику сплошной среды в нелинейной теории упругости, являются тензоры-градиенты векторов места [52]:

в v-конфигурации

$$\mathbf{C} = \nabla_0 \mathbf{R} = \mathbf{i_k i_m}\frac{\partial X_m}{\partial a_k}, \tag{1.1.3}$$

в V-конфигурации

$$\mathbf{C}^{-1} = \nabla \mathbf{r} = \mathbf{i_k i_m}\frac{\partial a_m}{\partial X_k}. \tag{1.1.4}$$

В отличие от классической линейной теории упругости, в которой основной характеристикой деформации среды является линейный тензор деформации Коши, в нелинейной теории упругости деформацию в сплошной среде характеризуют мера деформации Коши–Грина

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^{\mathbf{T}}, \tag{1.1.5}$$

которая определена в v-базисе отсчетной конфигурации, и мера деформации Фингера

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{C}, \tag{1.1.6}$$

которая определена в V-базисе актуальной конфигурации. Главные значения и инварианты тензоров $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ совпадают, что следует из формул (1.1.5) и (1.1.6):

$$A_1(\mathbf{G}) = A_1(\mathbf{F}) = G_1 + G_2 + G_3,$$
$$A_2(\mathbf{G}) = A_2(\mathbf{F}) = G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_1,$$

$$A_3(\mathbf{G}) = A_3(\mathbf{F}) = G_1 G_2 G_3 = \frac{G}{g}.$$

По этим мерам в отсчетной конфигурации определяется тензор деформации Коши–Грина

$$\mathbf{S} = 1/2\,(\mathbf{G} - \mathbf{I})\,, \tag{1.1.7}$$

в актуальной — тензор деформации Альманзи

$$\mathbf{g} = 1/2(\mathbf{F}^{-1} - \mathbf{I}). \tag{1.1.8}$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичный тензор, определенный в соответствующей конфигурации.

Далее будем обозначать объем тела, ограничивающую его поверхность и плотность в V-конфигурации соответственно V, O, ρ, а в v-конфигурации — v, o, ρ_0 соответственно. По законам сохранения массы справедливы соотношения, связывающие параметры тела в обеих конфигурациях:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{dV}{dv} = \sqrt{\frac{G}{g}} = J, \tag{1.1.9}$$

где

$$\frac{G}{g} = \det \mathbf{G} = \det{}^{-1} \mathbf{g}.$$

1.1.3. Описание напряженного состояния сплошной среды. Основным тензором, описывающим напряженное состояние среды в актуальной конфигурации, или тензором истинных напряжений, является тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$. Значение этого тензора состоит в том, что вектор напряжения $\mathbf{t_N}$ на ориентированной площадке с нормалью $\mathbf{N}$ определяется с помощью формулы Коши

$$\mathbf{t_N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}. \tag{1.1.10}$$

Описание напряженного состояния с помощью тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$, определенного в актуальной конфигурации, естественно и физически наглядно.

Закон состояния, определяющий тензор Коши, в случае гиперупругой, то есть имеющей упругий потенциал, среды представляется в виде [52]

$$\mathbf{T} = 2J^{-1}\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\chi}_\mathbf{F}. \tag{1.1.11}$$

Здесь χ — упругий потенциал, который для изотропных материалов представляется в виде скалярной функции от инвариантов $A_k(\mathbf{F})$ меры деформации Фингера $\mathbf{F}$:

$$\chi = \chi\,(A_1,\, A_2,\, A_3)\,. \tag{1.1.12}$$

Однако, как правило, актуальная конфигурация является неизвестной и сама требует определения, в то время как отсчетная конфигурация является заданной. Проблема отыскания напряженного состояния деформированной среды существенно упрощается за счет введения тензора напряжений Пиола $\mathbf{\Pi}$, определенного в отсчетной конфигурации и связанного с тензором Коши соотношением

$$\mathbf{\Pi} = J\mathbf{C}^{-T}\cdot\mathbf{T}. \tag{1.1.13}$$

Механический смысл тензора Пиола состоит в том, что в исходном соотношении (1.1.10), определяющем напряжение на ориентированной площадке в актуальной конфигурации, ориентированная площадка $\mathbf{N}\,dO$ заменяется ее представлением $\mathbf{n}\,do$ в отсчетной конфигурации:

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}\,dO = J\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{T}\,do = \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Pi}\,do. \tag{1.1.14}$$

Нетрудно заметить, что тензор напряжений Пиола, в отличие от тензора Коши, является несимметричным тензором, что в некоторых ситуациях приносит неудобства. В ряде случаев оказывается целесообразным использование симметричного тензора напряжений Кирхгофа

$$\mathbf{P} = \mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{C}^{-1},$$

который связан с тензором Коши соотношением

$$\mathbf{P} = J\mathbf{C}^{-T}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{C}^{-1}. \tag{1.1.15}$$

Тензоры Пиола и Кирхгофа являются удобными вспомогательными величинами, которые непосредственно не определяют реальное напряженное состояние деформированной среды. Определение последнего в каждом случае требует возвращения к «истинному» тензору напряжений Коши. Однако тензоры Пиола и Кирхгофа играют весьма существенную роль при построении уравнений состояния для гиперупругих сред. Это обусловлено тем, что тензор напряжений Кирхгофа $\mathbf{P}$ сопряжен тензору деформации Коши–Грина $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{P} = \chi_{\mathbf{S}} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{S}}, \tag{1.1.16}$$

а тензор напряжений Пиола $\mathbf{\Pi}$ сопряжен градиенту деформации $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{\Pi} = \chi_{\mathbf{C}} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{C}}. \tag{1.1.17}$$

Справедливо также представление тензора напряжений Пиола $\mathbf{\Pi}$ через производную потенциальной энергии по тензору деформации

$$\mathbf{\Pi} = \chi_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}. \tag{1.1.18}$$

1.1.4. Некоторые свойства операций с ∇-оператором. Далее будет часто использоваться введенный ранее формулами (1.1.1) и (1.1.2) ∇-оператор. Напомним, что он определяется

в v-конфигурации:

$$\nabla_0 = \mathbf{r}_k \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{i}_m \frac{\partial a_m}{\partial q_k}, \tag{1.1.19}$$

в V-конфигурации:

$$\nabla = \mathbf{R}_k \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad \mathbf{R}_k = \mathbf{i}_m \frac{\partial X_m}{\partial q_k}. \tag{1.1.20}$$

Градиент произвольного вектора представляется в виде диады

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s}\, \mathbf{u} = \mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s}\, \mathbf{i}_k u_k = \mathbf{i}_s \mathbf{i}_k \frac{\partial u_k}{\partial x_s} \tag{1.1.21}$$

или тензора

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \tag{1.1.22}$$

Производная произвольного вектора представляется в виде:

$$d\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u}^T \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_s \frac{\partial u_k}{\partial x_s} \cdot \mathbf{i}_q\, dx_q = \mathbf{i}_k \frac{\partial u_k}{\partial x_s}\, dx_s = \mathbf{i}_k\, du_k. \tag{1.1.23}$$

1.2. Описание напряженного состояния электроупругой среды

В настоящем разделе приводятся сведения из нелинейной механики сплошных электроупругих сред.

1.2.1. Электрический потенциал. Одним из основных параметров, определяющих состояние электроупругой среды, является электрический потенциал φ — скалярная функция. Заданием потенциала определяются векторы напряженности электрического поля в актуальной и отсчетной конфигурациях:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{W} = -\nabla_0\varphi. \tag{1.2.1}$$

Вектор $\mathbf{W}$, который называют «материальным» вектором напряженности электрического поля, играет весьма существенную роль в механике электроупругой среды, поскольку по нему определяется «электрическое смещение» в отсчетной конфигурации — «материальный» вектор поляризации:

$$\boldsymbol{\pi} = -\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{W}}. \tag{1.2.2}$$

Электрические и механические свойства электроупругой среды в актуальной конфигурации описываются вектором поляризации

$$\mathbf{p} = -J^{-1}\mathbf{C}^T\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{W}} = J^{-1}\mathbf{C}^T\boldsymbol{\pi}, \tag{1.2.3}$$

вектором индукции

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{p}, \tag{1.2.4}$$

электрическим тензором напряжений Максвелла [71, 102–104]

$$\mathbf{M}^{\mathbf{E}} = \mathbf{M} + \mathbf{p}\mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \varepsilon_0\mathbf{E}\mathbf{E} - 1/2\, \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\mathbf{I} \tag{1.2.5}$$

и уравнением состояния в виде

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} - \mathbf{pE}, \quad \mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{C}^{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}. \tag{1.2.6}$$

1.2.2. Представление потенциальной энергии в нелинейной механике электроупругих сред. Участвующие в представлениях (1.2.2)–(1.2.6) вектор $\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{W}}$ и тензор $\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{S}}$ являются производными скалярной функции $\chi = \chi(\mathbf{S}, \mathbf{W})$ — термодинамического потенциала [54, 71, 102–104], свободной энергии единицы объема [64], которая в настоящей работе предполагается зависящей от тензора деформации Коши–Грина $\mathbf{S}$ и «материального» вектора напряженности электрического поля $\mathbf{W}$:

$$\chi_{\mathbf{W}} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{W}}, \quad \chi_{\mathbf{S}} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{S}}.$$

Функция $\chi = \chi(\mathbf{S}, \mathbf{W})$ определяет запасенную в процессе деформации энергию электроупругого тела. В общем случае термодинамический потенциал предполагается зависящим не только от тензора $\mathbf{S}$ и вектора $\mathbf{W}$, но и от температуры θ, которая отвечает за термоупругие и пироэлектрические эффекты в электроупругой среде:

$$\chi = \chi(\mathbf{S}, \mathbf{W}, \theta). \tag{1.2.7}$$

При построении определяющих соотношений предполагаем, что состояние

$$\mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{W} = 0, \quad \theta = \theta_0 \tag{1.2.8}$$

является состоянием с минимальной свободной энергией. Ограничиваясь удержанием в разложении функции (1.2.7) в окрестности состояния (1.2.8) членов четвертого порядка по деформациям и электрическому полю и второго порядка по отклонению температуры, получим общее представление термодинамического потенциала в виде [54]:

$$\begin{aligned}\chi = \frac{1}{2}\,{}^4\mathbf{C}^{\mathbf{W}}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S} + \frac{1}{6}\,{}^6\mathbf{C}^{\mathbf{W}}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S} +\\
+ \frac{1}{24}\,{}^8\mathbf{C}^{\mathbf{W}}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S} - {}^3\mathbf{e}\cdot\mathbf{W}\cdot\cdot\mathbf{S} - \frac{1}{2}\,{}^5\mathbf{f}\cdot\mathbf{W}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S} -\\
- \frac{1}{6}\,{}^7\mathbf{f}\cdot\mathbf{W}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S} - \frac{1}{2}\,{}^4\mathbf{d}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}\cdot\cdot\mathbf{S} -\\
- \frac{1}{4}\,{}^6\mathbf{d}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S} - \frac{1}{6}\,{}^5\mathbf{e}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}\cdot\cdot\mathbf{S} -\\
- \frac{1}{2}\,{}^2\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W} - \frac{1}{6}\,{}^3\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W} -\\
- \frac{1}{24}\,{}^4\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W} - \frac{1}{2}\eta\rho_0\frac{(\theta-\theta_0)^2}{\theta_0} -\\
- {}^2\boldsymbol{\theta}\cdot\cdot\mathbf{S}\,(\theta-\theta_0) - {}^1\boldsymbol{\upsilon}\cdot\mathbf{W}(\theta-\theta_0).\end{aligned} \qquad (1.2.9)$$

Здесь:
${}^4\mathbf{C}^{\mathbf{W}}$ — тензор IV ранга упругих констант II порядка, который характеризует линейную деформацию при постоянной температуре и электрическом поле;
${}^6\mathbf{C}^{\mathbf{W}}$ — тензор VI ранга и ${}^8\mathbf{C}^{\mathbf{W}}$ — тензор VIII ранга — тензоры упругих констант III и IV порядка соответственно, которые характеризуют нелинейную деформацию при постоянной температуре и электрическом поле;
${}^2\boldsymbol{\beta}$ — тензор II ранга констант диэлектрической восприимчивости;
${}^3\boldsymbol{\beta}$ — тензор III ранга констант диэлектрической восприимчивости II порядка, связанный с нелинейными оптическими и электрическими эффектами;
${}^4\boldsymbol{\beta}$ — тензор IV ранга констант диэлектрической восприимчивости III порядка.
Тензоры ${}^2\boldsymbol{\beta}$, ${}^3\boldsymbol{\beta}$ и ${}^4\boldsymbol{\beta}$ определены при постоянной температуре и деформации. Тензор диэлектрической восприимчивости ${}^2\boldsymbol{\beta}$ является симметричным. В линейном приближении его компоненты связаны с компонентами тензора диэлектрической проницаемости ${}^2\boldsymbol{\varepsilon}$ соотношениями $\varepsilon_{kn} = \varepsilon_0\delta_{kn} + \beta_{kn}$.
${}^3\mathbf{e}$ — тензор III ранга и ${}^5\mathbf{e}$ — тензор V ранга — тензорные пьезоэлектрические константы II порядка и IV порядка, связанные с электроакустическими эффектами (изменение

скорости акустических волн под действием приложенного электрического напряжения).

$^4\mathbf{d}$ — тензор IV ранга электрострикционных констант, связанный с упругооптическими и электрострикционными эффектами;

$^5\mathbf{f}$ — тензор V ранга — тензорный электроупругий коэффициент третьего порядка,

$^6\mathbf{d}$ — тензор VI ранга и $^7\mathbf{f}$ — тензор VII ранга — четный и нечетный тензорные электроупругие коэффициенты IV порядка, которые связаны с электроакустическими эффектами (изменение скорости акустических волн под действием приложенного электрического напряжения).

$^2\boldsymbol{\theta}$ — тензорный коэффициент термоупругости;

$^1\boldsymbol{\upsilon}$ — вектор пироэлектричества;

η — удельная теплоемкость;

ρ_0 — плотность материала, θ — температура.

Представление термодинамического потенциала (1.2.9) в покомпонентной форме в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned}\chi = {} & \frac{1}{2}\,{}^4C_{klmn}S_{kl}S_{mn} + \frac{1}{6}\,{}^6C_{klmnpq}S_{kl}S_{mn}S_{pq} + \\ & + \frac{1}{24}\,{}^8C_{klmnpqrs}S_{kl}S_{mn}S_{pq}S_{rs} - {}^3e_{mkl}W_mS_{kl} - \\ & - \frac{1}{2}\,{}^4d_{mnkl}W_mW_nS_{kl} - \frac{1}{6}\,{}^5e_{mnpkl}W_mW_nW_pS_{kl} - \\ & - \frac{1}{2}\,{}^5f_{mklpq}W_mS_{kl}S_{pq} - \frac{1}{6}\,{}^7f_{mklpqrs}W_mS_{kl}S_{pq}S_{rs} - \\ & - \frac{1}{4}\,{}^6d_{mnklpq}W_mW_nS_{kl}S_{pq} - \frac{1}{2}\,{}^2\varepsilon_{mn}W_mW_n - \frac{1}{6}\,{}^3\varepsilon_{mnp}W_mW_nW_p - \\ & - \frac{1}{24}\,{}^4\varepsilon_{mnpq}W_mW_nW_pW_q - \frac{1}{2}\eta\rho_0\frac{(\theta-\theta_0)^2}{\theta_0} - \\ & - {}^2\theta_{kl}S_{kl}(\theta-\theta_0) - {}^1\upsilon_kW_k(\theta-\theta_0).\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Выражения (1.2.6)–(1.2.10) представляют собой одну из наиболее общих форм определяющих соотношений нелинейной механики электроупругих сред, учитывающую термоупругие, пироэлектрические и другие температурные эффекты.

Необходимо отметить, что лишь немногие коэффициенты IV порядка известны. Отсутствие информации об этих коэффициентах приводит к значительным затруднениям в ряде приложений, в которых тем или иным образом используются нелинейные эффекты.

В отсутствие тепловых эффектов представление тензора Кирхгофа имеет вид [54, 65]:

$$\begin{aligned} P_{kl} = {}^4C_{klmn}S_{mn} + \frac{1}{2}\,{}^6C_{klmnpq}S_{mn}S_{pq} + \\ + \frac{1}{6}\,{}^8C_{klmnpqrs}S_{mn}S_{pq}S_{rs} - {}^3e_{mkl}W_m - \frac{1}{2}\,{}^4d_{mnkl}W_mW_n - \\ - \frac{1}{6}\,{}^5e_{mnpkl}W_mW_nW_p - -{}^5f_{mklpq}W_mS_{pq} - \\ - \frac{1}{2}\,{}^7f_{mklpqrs}W_mS_{pq}S_{rs} - \frac{1}{2}\,{}^6d_{mnklpq}W_mW_nS_{pq}. \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Из представления (1.2.11) нетрудно заметить, что механические напряжения, определяемые пьезоэлектрическим эффектом II порядка ${}^3e_{mkl}$, меняют знак вместе с электрическим полем, в то время как напряжения, определяемые электрострикцией ${}^4d_{mnkl}$, не изменяются при повороте электрического поля.

Замечание. Если материал обладает центральной симметрией, то из представления (1.2.10) следует, что все материальные коэффициенты нечетного порядка тождественно обращаются в нуль.

Учет многих слагаемых высокого порядка полезен при рассмотрении некоторых эффектов нелинейных взаимодействий в рамках нелинейной механики электроупругих сред. Однако в ряде публикаций [71, 76, 102–104] используется упрощенное представление термодинамической функции в виде:

$$\begin{aligned} \chi = \frac{1}{2}\,{}^4\mathbf{C}^{\mathbf{W}}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S} - {}^3\mathbf{e}\cdot\mathbf{W}\cdot\cdot\mathbf{S} - \frac{1}{2}\,{}^2\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W} + \\ + \frac{1}{6}\,{}^6\mathbf{C}^{\mathbf{W}}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S} - \frac{1}{6}\,{}^3\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W} - \\ - \frac{1}{2}\,{}^4\mathbf{d}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}\cdot\cdot\mathbf{S} - \frac{1}{2}\,{}^5\mathbf{f}\cdot\mathbf{W}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{S}. \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Выражение (1.2.12) представляет собой одну из возможных форм, определяющую соотношения нелинейной механики электроупругих сред, не учитывающую термоупругие, пироэлектрические и другие температурные эффекты. Далее, эффекты, обуславливающие необходимость учета констант диэлектрической восприимчивости III порядка и электрострикционных констант, не рассматриваются. Кроме того, пьезоэлектрические эффекты в динамике электроупругого тела играют значительно меньшую роль по сравнению с механическими эффектами. Это позволяет в представлении (1.2.12) не учитывать также пьезоэлектрические константы IV порядка и при исследовании конкретных задач использовать еще более простое представление термодинамического потенциала:

$$\chi(\mathbf{S},\,\mathbf{W}) = \frac{1}{2}\,{}^4\mathbf{C}^{\mathbf{W}} \cdot\cdot \mathbf{S} \cdot\cdot \mathbf{S} - {}^3\mathbf{e} \cdot \mathbf{W} \cdot\cdot \mathbf{S} - \\ - \frac{1}{2}\,{}^2\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} + \frac{1}{6}\,{}^6\mathbf{C}^{\mathbf{W}} \cdot\cdot \mathbf{S} \cdot\cdot \mathbf{S} \cdot\cdot \mathbf{S}. \quad (1.2.13)$$

Выражение (1.2.13) справедливо при использовании произвольной системы координат. В декартовой прямоугольной системе координат более удобным представляется использование покомпонентной формы термодинамического потенциала:

$$\chi = \frac{1}{2}\,{}^4C_{klmn}S_{kl}S_{mn} + \frac{1}{2}\,{}^6C_{klmnpq}S_{kl}S_{mn}S_{pq} - \\ - {}^3e_{mkl}W_mS_{kl} - \frac{1}{2}\,{}^2\beta_{mn}W_mW_n. \quad (1.2.14)$$

1.2.3. Особенность постановки краевой задачи электроупругости. Рассмотрим задачу о колебаниях электроупругой среды, занимающей некоторый объем V, ограниченный поверхностью O. Особенность постановки задач для электроупругих тел состоит в том, что наряду с граничными условиями для механической составляющей движения пьезоактивной среды необходимо ставить условия для электрической составляющей динамического процесса.

При постановке механической составляющей задачи будем полагать, что на поверхности тела O, состоящей из областей $O = O_1 + O_2$, на одной ее части O_1 задан вектор перемещений точек среды $\mathbf{u}^*$, на другой ее части O_2 известен вектор напряжений $\mathbf{t}^*_{\mathbf{N}}$. Возможен случай смешанных условий, когда в одной и той же области задаются как компоненты вектора перемещений, так и вектора напряжений.

Формулировка электрических условий зависит от способа возбуждения электроупругой среды. Пусть на поверхности тела $O = O_3 + O_4$ область O_3 металлизирована (т. е. нанесен электропроводящий слой), а область O_4 свободна от металлизации. В случае возбуждения колебаний за счет электрического напряжения φ^*, приложенного к электродированной поверхности, будем полагать, что в области O_3 задан электрический потенциал. В случае возбуждения колебаний за счет наведенного электрического заряда, распределенного на электроде, необходимо иметь в виду, что плотность заряда на поверхности электрода равна скачку нормальной компоненты вектора электрической индукции на этой поверхности

$$g = \mathbf{N}^+ \cdot (\mathbf{D}^+ - \mathbf{D}^-), \tag{1.2.15}$$

где $\mathbf{N}^+$ — орт внешней нормали, $\mathbf{D}^+$, $\mathbf{D}^-$ — значения электрической индукции соответственно вне и внутри электроупругого тела.

Если электрод изолирован (нет соединения с электрической цепью), значение потенциала определяется из условия сохранения заряда на внутренней и внешней поверхности электрода соответственно:

$$\iint\limits_{O_3} \mathbf{N}^+ \cdot (\mathbf{D}^+ - \mathbf{D}^-)\, dO = 0. \tag{1.2.16}$$

Далее будем полагать, что электроупругое тело находится в воздушной среде или в вакууме. Поскольку их диэлектрическая проницаемость намного (в сотни раз) меньше проницаемости пьезоактивной среды, то $\mathbf{D}^+ \ll \mathbf{D}^-$, что позволяет в соотношении (1.2.15) пренебречь величиной $\mathbf{D}^+$ и заменить выражение (1.2.15) приближенной формулой

$$g \approx -\mathbf{N} \cdot \mathbf{D}, \tag{1.2.17}$$

где $\mathbf{N}$ — орт внешней нормали, $\mathbf{D} = \mathbf{D}^-$ — значение электрической индукции в электроупругом теле. В этом случае условие сохранения заряда (1.2.16) принимает вид:

$$\iint\limits_{O_3} \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}\, dO = 0. \tag{1.2.18}$$

На неэлектродированной части поверхности O_4 пьезоактивной среды свободные заряды отсутствуют, что с учетом соотношения (1.2.17) приводит к следующему условию на этой части поверхности:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = D_3 = 0. \tag{1.2.19}$$

Замечание. Граничные условия с заданным потенциалом относятся к условиям первого рода. Граничные условия, задающие нормальную компоненту индукции, относятся к условиям второго рода, поскольку вектор индукции выражается через производные потенциала и перемещений. Электрические граничные условия третьего рода возникают при наличии электрических цепей, содержащих активные и реактивные элементы (емкости, индуктивности, сопротивления).

1.2.4. Постановка краевой задачи нелинейной теории электроупругости в пространственных (эйлеровых) координатах. Рассмотрим в пространственных (эйлеровых) координатах задачу о колебаниях электроупругой среды, занимающей некоторый объем V, ограниченный поверхностью $O = O_1 + O_2 = O_3 + O_4$. Полагаем, что на части поверхности O_1 задан вектор $\mathbf{R}^*$, определяющий перемещение точек среды, на другой части поверхности O_2 заданы механические напряжения $\mathbf{t}^*_{\mathbf{N}}$. На электродированной части поверхности O_3 задан электрический потенциал φ^*, на части поверхности O_4, которая также может быть частично металлизированной, задано распределение заряда g^*.

Краевая задача о колебаниях электроупругой среды в эйлеровой системе координат описывается уравнением движения

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{M}^{\mathbf{E}}\right) = \rho \ddot{\mathbf{R}}, \tag{1.2.20}$$

уравнением вынужденной электростатики

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{1.2.21}$$

и граничными условиями:
на поверхности O_1

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^*, \tag{1.2.22}$$

на поверхности O_2

$$\mathbf{N} \cdot (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{M}^{\mathbf{E}}) = \mathbf{t}^*_{\mathbf{N}}, \tag{1.2.23}$$

на поверхности O_3

$$\varphi = \varphi^*, \tag{1.2.24}$$

на поверхности O_4

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = -g^*. \tag{1.2.25}$$

С учетом выражений (1.2.5), (1.2.6) нетрудно видеть, что в уравнение движения (1.2.20) и граничное условие (1.2.23) входят лишь симметричный механический тензор Коши $\mathbf{T}$ и симметричная часть $\mathbf{M}$ электрического тензора напряжений Максвелла (1.2.5). То есть выражения (1.2.20) и (1.2.23) можно переписать в виде:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{M}) = \rho\, \ddot{\mathbf{R}}, \tag{1.2.26}$$

на поверхности O_2

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{M}) = \mathbf{t}^*_{\mathbf{N}}. \tag{1.2.27}$$

1.2.5. Постановка краевой задачи нелинейной теории электроупругости (лагранжевы координаты). В ряде случаев целесообразно использовать материальное представление уравнений движения и граничных условий в лагранжевых координатах. С этой целью, как и в упругом случае, вводится в рассмотрение тензор напряжений Пиола

$$\mathbf{\Pi} = J\mathbf{C}^{-\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}, \tag{1.2.28}$$

электрический тензор Пиола–Максвелла

$$\mathbf{m} = J\mathbf{C}^{-\mathbf{T}} \cdot \mathbf{M} \tag{1.2.29}$$

и материальная форма электрической индукции

$$\mathbf{d} = J\mathbf{C}^{-\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}, \tag{1.2.30}$$

отнесенные к базису отсчетной конфигурации.

Рассмотрим в материальных (лагранжевых) координатах задачу о колебаниях электроупругой среды, занимающей объем v, ограниченный поверхностью $o = o_1 + o_2 = o_3 + o_4$. Полагаем, что на части поверхности o_1 задан вектор $\mathbf{r}^*$, определяющий перемещение точек среды, на части поверхности o_2 заданы механические напряжения $\mathbf{t}^*_\mathbf{n}$. На электродированной части поверхности o_3 задан электрический потенциал φ^*, на части поверхности o_4, которая также может быть частично металлизированной, задано распределение заряда g^*.

В лагранжевых координатах краевая задача описывается уравнением движения

$$\nabla_0 \cdot (\mathbf{\Pi} + \mathbf{m}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{R}}, \tag{1.2.31}$$

уравнением вынужденной электростатики

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{d} = 0 \tag{1.2.32}$$

и граничными условиями на поверхности $o = o_1 + o_2 = o_3 + o_4$:

на o_1

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}^*, \tag{1.2.33}$$

на o_2

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{\Pi} + \mathbf{m}) = \mathbf{t}^*_\mathbf{n}, \tag{1.2.34}$$

на o_3

$$\varphi = \varphi^*, \tag{1.2.35}$$

на o_4

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = -g^*. \tag{1.2.36}$$