

**Дифференциальные
формы и связности.
Сборник статей**

МЦНМО

УДК 514.762.5

ББК 22.151

Д50

Дифференциальные формы и связности

Электронное издание

М.: МЦНМО, 2018

38 с.

ISBN 978-5-4439-3144-9

Книга написана по материалам лекций, прочитанных авторами на первой летней школе «Современная математике» в Дубне в июле 2001 года.

В нее вошли ранее издававшиеся брошюры А.А.Болибруха и М.Э.Казаряна, в которых рассказывается об основных понятиях дифференциальной геометрии: дифференциальных формах, расслоениях, связностях, а также об их использовании в современной физике.

Книга адресована студентам младших курсов и школьникам старших классов.

Материалы книги были опубликованы в двух брошюрах в 2002 г.

Подготовлено на основе книги: Дифференциальные формы и связности. Сборник статей. — М.: МЦНМО, 2017. — ISBN 978-5-4439-1144-1.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241-08-04.
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-3144-9

© Болибрух А. А., Казарян М. Э., 2002.

© МЦНМО, 2017.

А. А. Болибрух

Уравнения Максвелла и дифференциальные формы

В этих двух лекциях мы хотим рассказать вам о дифференциальных формах, расслоениях и связностях. Эти понятия сейчас очень активно используются в самых разных областях математики и физики, и нам бы хотелось хотя бы немного вас с ними познакомить. Для того чтобы наш рассказ не был излишне абстрактным, мы решили привязаться к такому физическому объекту, как *электромагнитное поле*, и показать вам, как при попытке описания этого поля естественным образом возникают все перечисленные понятия.

Разумеется, эти лекции не претендуют на систематическое изложение теории дифференциальных форм или теории расслоений и связностей. Каждый из этих сюжетов занимает примерно семестровый курс на мехмате. Наша задача гораздо скромнее: предварительное знакомство с предметом и мотивировки (пришедшие из физики) необходимости его изучения.

Лекция 1

§1.

Принято считать, что электромагнитное поле характеризуется двумя величинами — *вектором электрической напряженности* $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ и *вектором магнитной напряженности* $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$. Предполагается, что компоненты этих векторов гладко зависят от точки пространства, а также от времени. Совокупность экспериментальных данных была обобщена Максвеллом в 1861—1862 годах в его знаменитых *уравнениях Максвелла*:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \end{cases}$$

где c — скорость света, ρ — плотность заряда, а $\vec{j}$ — плотность тока, т. е. плотность заряда, умноженная на скорость перемещения этого заряда.

Напомним, как определяются ротор и дивергенция:

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right).$$

Но действительно ли величины $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\operatorname{rot} \vec{v}$ являются векторами? Как они меняются при замене координат? Скоро мы увидим, что они не очень похожи на векторы и что есть другая, более удобная форма записи тех же самых уравнений, которая возникла позднее, когда появилась теория дифференциальных форм, введенная Пуанкаре и Эли Картаном.

Чтобы лучше понять, как меняются компоненты вектора при замене координат, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим n -мерное пространство $\mathbb{R}^n$ (можно считать для простоты, что $n = 3$) и гладкую кривую $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, задаваемую в некоторой системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ уравнениями $x^i = \varphi^i(t)$. При $t = 0$ касательный вектор к этой кривой в выбранной системе координат имеет компоненты $\xi^i = \dot{\varphi}_i(0)$ (точкой обозначается дифференцирование по t). Теперь рассмотрим новую систему координат $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$, связанную со старой при помощи гладких функций $\hat{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$. Компоненты касательного вектора в новой системе координат будем обозначать $\hat{\xi}^i$. Тогда

$$\hat{\xi}^i = \frac{d\hat{x}^i}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{df^i(\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \Big|_{t=0} \xi^j$$

по формуле производной сложной функции. Вот как, оказывается, связаны координаты касательного вектора в новой и старой системах координат.

Пример 2. Рассмотрим функцию φ от n переменных: $\varphi = \varphi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$. Зачем мы записали ее сразу в новых координатах, станет ясно чуть позже. Рассмотрим *градиент* этой функции (который также часто называют вектором)

$$\operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^n} \right) = (\hat{\eta}^1, \dots, \hat{\eta}^n).$$

Теперь попробуем сделать замену координат и вычислить компоненты градиента, только на этот раз уже не в новой, а в старой системе координат:

$$\eta^i = \frac{\partial \varphi(f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, f^n(x^1, \dots, x^n))}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \hat{\eta}^j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}.$$

Сравним формулы, полученные в этих двух примерах. В обеих этих формулах участвуют выражения вида $\partial f^i / \partial x^j$, но между ними есть существенное отличие. В первом случае мы выражаем новые координаты через старые, а во втором — наоборот. Мы приходим к выводу, что при замене координат компоненты градиента меняются совсем по другому закону, чем компоненты касательного вектора. Градиент скорее напоминает не вектор, а дифференциал функции:

$$d\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^j} d\hat{x}^j.$$

И градиент функции, и касательный вектор являются *тензорами*, но тензорами разного типа.

§ 2.

Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ пространство векторных полей $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Под векторным полем мы будем понимать выражение

$$\vec{v}(x^1, \dots, x^n) = \sum_{j=1}^n v_j(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

где $v_j(x^1, \dots, x^n)$ — гладкие функции, а через $\partial / \partial x^j$ обозначен вектор e_j стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$ (эти обозначения оказываются очень удобными при рассмотрении векторных полей на многообразиях). Такие поля еще иногда называют *касательными*. Множество гладких функций на $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Множество векторных полей является линейным пространством: векторные поля можно складывать (покоординатно) и умножать на числа. Более того, их можно умножать на любые гладкие функции, заданные на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. К сожалению, гладкие функции образуют не поле, а кольцо, поэтому говорят не о линейном пространстве векторных полей, а о *модуле векторных полей над кольцом гладких функций*.

Рассмотрим сопряженное пространство к $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство $\mathcal{F}$ -линейных функционалов $\alpha: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, т. е. таких отображений, что $\alpha(f\vec{v}) = f\alpha(\vec{v})$ для любой гладкой функции $f(x)$ и любого векторного поля $\vec{v}$ и $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha(\vec{v}_1) + \alpha(\vec{v}_2)$. Это сопряженное пространство также является модулем над кольцом гладких функций. Оно называется *пространством дифференциальных 1-форм* и обозначается $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. У этого модуля есть образующие, сопряженные к образующим $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

Оглавление

А. А. Болибрух. Уравнения Максвелла и дифференциальные формы

Лекция 1	3
Лекция 2	13

М. Э. Казарян. Дифференциальные формы, расслоения, связности

Дифференциальные формы	25
Связность в S^1 -расслоении	28
Дифференциальная геометрия поверхностей	31
Формула Гаусса—Бонне	35