В. Л. Файншмидт

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО АРГУМЕНТА

- ***Дифференциальное исчисление***
- ***Интегральное исчисление***
- ***Ряды***

УЧЕБНИК

bhv®

В. Л. Файншмидт

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ и ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике вузов Северо-Запада РФ в качестве учебника для студентов инженерных специальностей технических вузов

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2006

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.143я73
Ф12

Файншмидт В. Л.

Ф12 Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного аргумента. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 224 с.: ил.

ISBN 5-94157-932-2

Учебник содержит основные сведения по дифференциальному и интегральному исчислению: функции, пределы, производные, интеграл, дифференциал, ряды. Основан на опыте многолетнего преподавания курса студентам технического вуза. Содержит большое число примеров приложения изучаемого математического аппарата к задачам физики и техники.

Для студентов инженерных специальностей технических вузов

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.143я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Татьяна Лапина*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Виктора Файншмидта*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн серии	*Игоря Цырульникова*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 26.05.06.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,06.
Тираж 1000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-932-2

Часть 1. Дифференциальное исчисление

1.1. Множества

Первичным понятием в курсе математики является множество. Как и всякому первичному понятию, дать определение множеству невозможно. Мы будем считать, что всем ясно, что такое множество.

Объекты, из которых состоит множество, называют элементами множества. Если A - некоторое множество и a - какой-нибудь элемент этого множества, то пишут $a \in A$. Если элемент b не содержится в множестве A, то пишут $b \notin A$.

Мы будем нередко пользоваться символом $\forall$, который следует читать как всякий, любой, каждый. Например, запись $\forall a \in A$ читается так: всякое a из A. Так же часто будет использоваться обозначение $\exists$, которое читается как существует, имеется, найдется. Поэтому можно писать $\exists a \in A$ вместо слов "в множестве A существует элемент a". Заметим, что символы $\forall$ и $\exists$ называют, соответственно, кванторами общности и существования.

Наиболее часто вначале мы будем встречаться с множествами, состоящими из вещественных чисел. При этом будем пользоваться такими обозначениями:

$R = (-\infty, +\infty)$ - множество всех вещественных чисел;

Z - множество всех целых чисел;

N - множество всех целых положительных чисел;

$[a, b]$ - множество всех чисел, которые не меньше a и не больше, чем b (такое множество называют замкнутым промежутком, или сегментом);

(a, b) - множество всех чисел, которые больше a и меньше b (такое множество называют открытым промежутком, или интервалом);

$[a, b)$ - множество всех чисел, которые не меньше a, но меньше b (промежуток, полуоткрытый справа);

$(a, b]$ - множество всех чисел, которые больше a, но не больше b (промежуток, полуоткрытый слева);

$[a, +\infty)$ - множество всех чисел, которые не меньше a;

$(-\infty, b]$ - множество всех чисел, которые не больше b;

$\varnothing$ - пустое множество, то есть множество, не содержащее ни одного элемента.

Для множеств можно ввести операции сложения и умножения.

Суммой или объединением множеств A и B называют множество, содержащее все элементы A и все элементы B. Сумму принято обозначать символом $A \bigcup B$.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то сумму обозначают знаком $+$, то есть пишут $A + B$.

Произведением или пересечением множеств A и B называют множество, содержащее все те элементы, которые принадлежат и A, и B. Произведение обозначается $A \bigcap B$ или просто AB.

Примеры.

1. $[1, 4] \bigcup [2, 5) = [1, 5)$;
2. $[2, 6) + [6, 8] = [2, 8]$;
3. $[2, 6) \bigcap [6, 8] = \varnothing$;
4. $[1, 7) \bigcap (4, 9) = (4, 7)$.

Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то говорят, что A содержится в B, и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Например, $N \subset Z$, $[2, 4] \subset (1, 10)$.

Нам понадобятся еще понятия, связанные с множествами. Именно, всякий интервал $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2)$, содержащий точку x, называют окрестностью этой точки. Если из этого интервала исключить точку x, то получится множество $(x - \varepsilon_1, x) + (x, x + \varepsilon_2)$, которое называется проколотой окрестностью точки. Окрестность вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ называют ε-окрестностью точки x.

1.2. Границы числовых множеств

Число M называется верхней границей числового множества X, если для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant M$.

Число m называется нижней границей числового множества X, если для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \geqslant M$.

Рассмотрим, например, интервал $(4, 7)$. В качестве его верхней границы можно взять число 10, поскольку все числа из $(4, 7)$ не превосходят 10. Ясно, что верхней границей может быть и 7,5. Очевидно, что допустимо принять за верхнюю границу число 7. Заметим, кстати, что никакое число, меньшее семи, быть верхней границей не может. Ясно, что в качестве нижней границы интервала можно взять 4 и любое число, меньшее, чем 4.

Нетрудно понять, что если множество имеет одну верхнюю границу, то оно имеет бесконечно много таких границ. То же самое можно сказать и о нижних границах. Наименьшая из всех верхних границ множества X называется точной верхней границей множества, или супремумом, и обозначается $\sup X$. Наибольшая из всех нижних границ - точной нижней границей, или инфимумом, и обозначается $\inf X$.

Пусть $M^* = \sup X$. Возьмем какое-нибудь число $\varepsilon > 0$. Тогда число $M^* - \varepsilon$ окажется меньше M^*, а потому оно не может быть верхней границей множества X. Это значит, что в множестве X найдется такой элемент x, для которого будет справедливым неравенство $x > M^* - \varepsilon$.

Итак, если $M^* = \sup X$, то для любого $\varepsilon > 0$ в множестве X найдется элемент x такой, что $x > M^* - \varepsilon$.

Аналогичное утверждение справедливо и для $\inf X$.

Заметим, что точные границы множества могут принадлежать ему, а могут и не принадлежать. Например, множество $[3, 6)$ содержит свою точную нижнюю границу 3, но не содержит точную верхнюю границу 6.

В дальнейшем множества, ограниченные сверху и снизу, мы будем называть ограниченными.

Если $X \subset [m, M]$, то очевидно, что m - нижняя и M - верхняя границы X, то есть множество, лежащее в некотором промежутке, ограничено.

Ясно также, что если неравенство $|x| \leqslant A$, где A - некоторое число, выполняется для $\forall x \in X$, то множество X ограничено.

1.3. Понятие функции

Пусть имеется два множества X и Y. Если каждому элементу x множества X ставится в соответствие по некоторому правилу один определенный элемент y множества Y, то говорят, что задана функция, отображающая X в Y. При этом X называют областью задания, а Y - областью значений функции.

Если правило соответствия обозначить через f, то запись $y = f(x)$ означает, что по этому правилу элементу x отвечает элемент y.

Таким образом, функция считается заданной, если указаны:

а) область задания X;

б) правило f, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие значение $y = f(x) \in Y$.

Из сказанного ясно, что равенства $y = x^2,\ x \in Z$ и $y = x^2,\ x \in R_1$ задают две различные функции, отличающиеся своими областями задания.

Мы вначале будем рассматривать функции, у которых аргумент x и функция $y = f(x)$ принимают только вещественные значения. Для таких функций мы введем понятие естественной области задания. Именно, естественной областью задания функции $y = f(x)$ будем называть множество всех тех вещественных x, при которых оказываются вещественными значения $y = f(x)$.

Примеры.

1. Для функции $y = \sqrt{x}$ естественной областью задания является множество $[0, +\infty)$.

2. Функция $y = \dfrac{1}{x+1}$ существует при всех $x \neq -1$. Поэтому ее естественную область задания можно записать так: $(-\infty, -1) + (-1, +\infty)$.

1.4. Элементарные функции

Мы называем основными элементарными функции, которые задаются такими формулами:

$$y = x^\mu,\ \ y = a^x,\ \ y = \log_a x,\ \ y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ y = \operatorname{tg} x,\ \ y = \operatorname{ctg} x,$$

$$y = \arcsin x,\ \ y = \arccos x,\ \ y = \operatorname{arctg} x,\ \ y = \operatorname{arcctg} x.$$

Остановимся поподробнее на каждой из этих функций, чтобы разобраться с их естественными областями задания.

1. Степенная функция $y = x^\mu$.

Естественная область задания этой функции зависит от того, какое значение имеет μ.

Если, например, μ - целое положительное, то y принимает вещественные значения при любых вещественных значениях x. Значит, естественной областью задания в этом случае оказывается R.

Если μ - целое отрицательное, то y не существует при $x = 0$ и принимает вещественные значения при всех остальных вещественных x. Следовательно, естественная область задания в этом случае имеет вид $(-\infty, 0) + (0, +\infty)$.

При $\mu = \dfrac{1}{2}$ естественной областью задания оказывается $[0, +\infty)$, а при $\mu = \dfrac{1}{3}$ естественной областью задания оказывается R.

Мы не будем подробно рассматривать все возможные случаи.

2. Показательная функция $a^x \quad (a > 0)$.

Так как $a > 0$, то функция вещественна при любом $x \in R$. Поэтому ее естественной областью задания является R.

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

Поскольку у любого положительного числа имеется вещественный логарифм по любому положительному основанию, а отрицательные числа вещественных логарифмов не имеют, постольку естественной областью задания логарифмической функции является полубесконечный промежуток $(0, +\infty)$.

4. Тригонометрические функции $y = \sin x$ **и** $y = \cos x$.

Обе эти тригонометрические функции, как известно, существуют и принимают вещественные значения при всех $x \in R$. Следовательно, R - естественная область задания этих функций. При этом областью значений обеих функций является промежуток $[-1, 1]$.

5. Тригонометрические функции $y = \operatorname{tg} x$ **и** $y = \operatorname{ctg} x$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ существует и имеет вещественные значения при любых вещественных x, кроме $x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$. Поэтому сумма всех интервалов $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), \quad k \in Z$ является естественной областью задания функции $y = \operatorname{tg} x$.

Аналогичным образом, естественной областью задания функции $y = \operatorname{ctg} x$ оказывается сумма всех интервалов $(k\pi, (k+1)\pi), \quad k \in Z$. Заметим, что областью значений этих двух функций является множество всех вещественных чисел, то есть $(-\infty, +\infty)$.

6. Обратная тригонометрическая функция $y = \arcsin x$.

Напомним вначале, что арксинусом аргумента x называют такое число y из сегмента $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, у которого синус равен x.

Иначе говоря, равенство $y = \arcsin x$ означает, что $x = \sin y$, причем $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Из этого становится ясно, что значения x могут изменяться от -1 до $+1$. Следовательно, естественной областью задания функции $y = \arcsin x$ является промежуток $[-1, 1]$. Заметим, что областью значений оказывается сегмент $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

7. Обратная тригонометрическая функция $y = \arccos x$.

Арккосинусом аргумента x называют такое число y из сегмента $[0, \pi]$, у которого косинус равен x.

Другими словами, если $y = \arccos x$, то $x = \cos y$, а $y \in [0, \pi]$. Поэтому естественной областью задания функции $y = \arccos x$ является сегмент $[-1, 1]$, а областью значений – сегмент $[0, \pi]$.

8. Обратная тригонометрическая функция $y = \operatorname{arctg} x$.

Арктангенсом аргумента x называют такое число y из интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, у которого тангенс равен x.

Это значит, что если $y = \operatorname{arctg} x$, то $x = \operatorname{tg} y$, причем $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Поскольку тангенс может быть любым вещественным числом, постольку естественной областью задания арктангенса является R. При этом областью значений оказывается интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

9. Обратная тригонометрическая функция $y = \operatorname{arcctg} x$.

Арккотангенсом аргумента x называют такое число y из промежутка $(0, \pi)$, у которого котангенс равен x.

Так что если $y = \operatorname{arcctg} x$, то $x = \operatorname{ctg} y$, причем $y \in (0, \pi)$. Как известно, котангенс может принимать любые вещественные значения. Поэтому естественной областью задания арккотангенса является R. Областью значений $y = \operatorname{arcctg} x$ является интервал $(0, \pi)$.

Мы рассмотрели 11 основных элементарных функций.

Введем теперь понятие сложной функции. Пусть на промежутке (a, b) задана функция $y = f(x)$, такая, что $y \in (c, d)$, а на промежутке (c, d) задана функция $z = g(y)$, у которой $z \in (l, m)$. Тогда можно построить функцию $z = g(f(x))$, отображающую промежуток (a, b) в промежуток (l, m). Такая функция называется сложной функцией (или суперпозицией) функций f и g. Например, исходя из функций $y = x^2, \quad x \in R$ и $z = \sin y, \quad y \in R$, можно построить сложную функцию $z = \sin(x^2)$.

В дальнейшем всякую функцию, которая образована из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий или суперпозиций, мы будем называть элементарной функцией.

Приведем некоторые примеры элементарных функций.

1. Функция

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad x \in R.$$

называется многочленом (или полиномом) степени n.

2. Функция

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0},$$

являющаяся частным двух многочленов, называется рациональной дробью или функцией, рационально зависящей от x. Очевидно, что естественной областью задания рациональной дроби является вся вещественная ось, за исключением тех точек x, в которых знаменатель $P_n(x)$ равен нулю.

1.5. Понятие предела

Начнем с некоторых наводящих рассуждений. На рис. 1 приведен график функции $y = f(x)$, заданной на полубесконечном промежутке $[a, +\infty)$.

Видно, что с ростом значений аргумента x значения функции приближаются к величине l, так что $|f(x) - l|$ имеет тенденцию к уменьшению. Мы хотим описать этот процесс приближения. Для этого заметим следующее: если мы зададим какое-нибудь положительное число ε, то, начиная с некоторого x_0, значения $f(x)$ будут отличаться от l меньше, чем на взятое нами ε. Другими словами, при всех $x > x_0$ будет выполняться неравенство $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

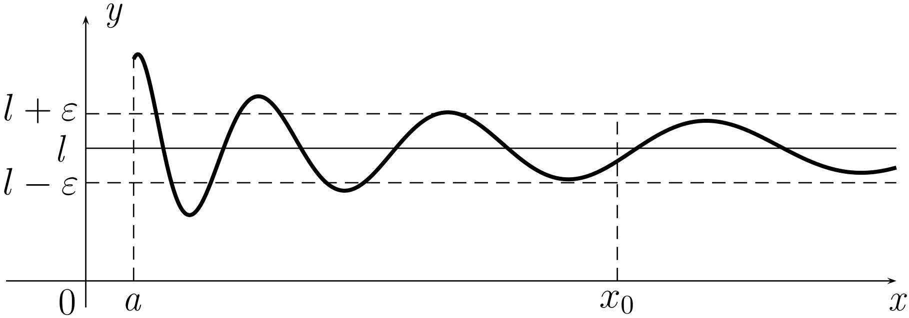

Рис. 1. Иллюстрация к понятию предела

Сделанное замечание приводит к такому определению предела:

Определение. Пусть функция f задана на промежутке $[a, +\infty)$. Число l называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое x_0, что для всех x, удовлетворяющих условию $x > x_0$, выполняется неравенство $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ или, что то же, $|f(x) - l| < \varepsilon$.

В этом случае мы будем писать:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \text{или} \quad f(x) \to l \quad (x \to +\infty).$$

Используя введенные нами кванторы, определение предела можно записать несколько короче.

Определение. Число l называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для $\forall\varepsilon > 0\ \exists x_0$ такое, что при $\forall x > x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ или, что то же, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

Такого рода сокращенную запись мы будем использовать и дальше.

Пример. Пусть функция $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin x}{x^2 - 1}$ задана на промежутке $[2, +\infty)$. Покажем, что ее предел при $x \to +\infty$ равен 1. Для этого возьмем какое-нибудь число $\varepsilon > 0$ и напишем неравенство

$$1 - \varepsilon < \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - 1} < 1 + \varepsilon.$$

Нетрудно видеть, что это неравенство равносильно такому

$$-\varepsilon < \frac{\sin x + 1}{x^2 - 1} < \varepsilon.$$

Так как $\sin x + 1 \geqslant 0$ и $x^2 - 1 > 0$, то в этом двойном неравенстве средняя часть не меньше нуля. Поэтому неравенство

$$-\varepsilon < \frac{\sin x + 1}{x^2 - 1}$$

выполняется при любых значениях x.

Обратимся к неравенству

$$\frac{\sin x + 1}{x^2 - 1} < \varepsilon.$$

Поскольку $\sin x + 1 \leqslant 2$, постольку наше неравенство будет заведомо выполнено, если

$$\frac{2}{x^2 - 1} < \varepsilon,$$

то есть

$$\frac{2}{\varepsilon} < x^2 - 1$$

или

$$x > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} + 1}.$$

Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое число $x_0 = \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon} + 1}$, что при всех $x > x_0$ выполняется неравенство

$$1 - \varepsilon < \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - 1} < 1 + \varepsilon.$$

В соответствии с данным нами определением, это означает, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - 1} = 1.$$

Если функция $f(x)$ задана на промежутке $(-\infty, b]$, то для нее можно ввести понятие предела при $x \to -\infty$.

Определение. Число l называют пределом $f(x)$ при $x \to -\infty$, если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0$ такое, что для $\forall x < x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ или, что то же, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

В этом случае пишут

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \quad \text{или} \quad f(x) \to l \ \ (x \to -\infty).$$

Заметим, что в литературе пределы $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ часто обозначают символами $f(+\infty)$ и $f(-\infty)$.

Если функция $f(x)$ задана на конечном промежутке, например, (a, b), то для нее можно определить предел при x, стремящемся к a или b. Например,

Определение. Число l называют пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a справа, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется в промежутке (a, b) такое число x_0, что при $\forall x \in (a, x_0)$, будет выполняться неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ или, что то же, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

В этом случае мы пишем

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = l \quad \text{или} \quad f(x) \to l \ \ (x \to a + 0).$$

Так как $x_0 > a$, то его можно записать в виде $x_0 = a + \delta$, где $\delta > 0$. Используя такую запись, мы можем сформулировать определение предела следующим образом:

Определение. Число l называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a+0$, если для $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ такое, что при $\forall x \in (a, a+\delta)$ будет выполняться неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ или $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

Таким же образом вводится понятие предела $f(x)$ при x, стремящемся к b слева. Мы не будем такое определение формулировать, советуя читателю сделать это самостоятельно. Пишут так:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = l \quad \text{или} \quad f(x) \to l \quad (x \to b - 0).$$

Нередко правосторонние и левосторонние пределы обозначают соответственно $f(a + 0)$ и $f(b - 0)$.

Пусть функция $f(x)$ задана в области $(a, c)+(c, b)$. Если существуют два равных предела

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = \lim_{x \to c+0} f(x) = l,$$

то говорят, что l является пределом $f(x)$ при $x \to c$, и пишут так:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \quad \text{или} \quad f(x) \to l \quad (x \to c).$$

Заметим, что используя язык (ε, δ), определение для этого варианта можно сформулировать так:

Определение. Число l называют пределом $f(x)$ при $x \to c$, если для $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ такое, что при $\forall x \in (c-\delta, c)+(c, c+\delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ или, что то же, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

Итак, мы выяснили, в чем заключается понятие конечного предела. Мы дополним сказанное понятием бесконечного предела.

Пусть $f(x)$ задана на промежутке $[a, +\infty)$.

Определение. Мы будем говорить, что при $x \to +\infty$ функция $f(x)$ стремится к $+\infty$, если для $\forall A \ \ \exists x_0$ такое, что при $\forall x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > A$.

В этом случае мы будем писать

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad f(x) \to +\infty \quad (x \to +\infty).$$

Существо этого определения не сложное: функция $f(x)$ с ростом x может стать и оставаться больше любого заданного нами числа.

Далее, мы будем считать, что при $x \to +\infty$ функция $f(x)$ стремится к $-\infty$, если для $\forall A \ \ \exists x_0$ такое, что при $\forall x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) < A$.

Естественно, что соответствующая запись имеет вид:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \;\text{ или }\; f(x) \to -\infty \;\; (x \to +\infty).$$

Если $|f(x)| \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ стремится к ∞.

Аналогично определяются бесконечные пределы при $x \to c \pm 0$ и при $x \to c$.

Если функция стремится к $\pm\infty$ или к ∞, то ее называют бесконечно большой при соответствующем стремлении x.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в ее естественной области задания, то есть при $x \in (-\infty, 0) + (0, +\infty)$. Нетрудно показать, что имеют место такие равенства:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Рекомендуем проверить это самостоятельно, исходя из данных выше определений.

Теперь нам нужно понять, как фактически пределы находятся и какими свойствами обладают функции, имеющие пределы. Для этого мы рассмотрим один частный случай пределов.

1.6. Бесконечно малые функции

Определение. Если $f(x) \to 0$ при $x \to c$, то $f(x)$ называют бесконечно малой при $x \to c$.

Полагая в данном выше определении предела $l = 0$, можно сказать так: если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ такое, что при $\forall x \in (c - \delta, c) + (c, c + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$ или, что то же, $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to c$.

Аналогичным образом можно определить бесконечно малую при x, стремящемся к c справа или слева, или к $\pm\infty$.

Если сравнить общее определение предела с определением бесконечно малой, то нетрудно заметить, что $f(x) \to l$ тогда и только тогда, когда разность $f(x) - l \to 0$, то есть является бесконечно малой. Положим $\alpha(x) = f(x) - l$. Тогда $f(x) = l + \alpha(x)$. Таким образом, справедлива:

Теорема 1. Функция $f(x)$ имеет своим пределом l тогда и только тогда, когда $f(x) = l + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая.

Приведем еще три теоремы, описывающие свойства бесконечно малых функций.

Теорема 2. Сумма, разность и произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство. Будем для определенности считать, что $x \to +\infty$ (остальные случаи рассматриваются так же). Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to +\infty$. Тогда, в соответствии с определением бесконечно малой, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое x_0, что при $\forall x > x_0$ будут выполняться неравенства $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда получаем

$$|\alpha(x) \pm \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что $\alpha(x) \pm \beta(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Подобным образом доказывается, что $\alpha(x)\beta(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Следствие. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

Мы не будем доказывать следствие, рекомендуя читателю сделать это самостоятельно.

Теорема 3. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая.

Доказательство. Как и выше, будем для определенности считать, что функции $\alpha(x)$ и $f(x)$ заданы на $[a, +\infty)$, причем во всей области задания функция $f(x)$ ограничена, то есть $|f(x)| < M$, где M - некоторое положительное число, а $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. В силу определения бесконечно малой, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое x_0, что при $\forall x > x_0$ будет выполняться неравенство $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. В таком случае, при тех же значениях x окажется $|\alpha(x)f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$. Это означает, что произведение $\alpha(x)f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Теорема 4. Функция является бесконечно малой тогда и только тогда, когда обратная ей величина оказывается бесконечно большой.

Справедливость этой теоремы почти очевидна, так как неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$ выполняется тогда и только тогда, когда оказывается $|\dfrac{1}{\alpha(x)}| > A = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Если $x \to 0$, то $|x|^\mu \to 0$, если $\mu > 0$. Действительно, возьмем какое-нибудь $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\mu}}$. Тогда, очевидно, при $|x| < \varepsilon^{\frac{1}{\mu}}$

будет $|x|^\mu < \varepsilon$. Это означает, что $|x|^\mu \to 0$ при $x \to 0$.

Аналогичным образом нетрудно показать, что если $\mu > 0$, то функция $\dfrac{1}{x^\mu} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Пусть $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, где $x \in (0, +\infty)$. Так как $|\sin x| \leqslant 1$, а $\dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$, то $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$.

1.7. Основные теоремы о пределах

Теорема 1 (арифметические операции с пределами). Если

$$\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to c} f_2(x) = l_2,$$

то

$$\lim_{x\to c}(f_1(x) + f_2(x)) = l_1 + l_2, \quad \lim_{x\to c}(f_1(x) - f_2(x)) = l_1 - l_2,$$

$$\lim_{x\to c} f_1(x) f_2(x) = l_1 l_2, \quad \lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (l_2 \neq 0).$$

Доказательство. Все четыре утверждения доказываются одним и тем же способом. Поэтому мы рассмотрим лишь одно из них. В силу теоремы 1 предыдущего раздела, если $f_1(x) \to l_1$ и $f_2(x) \to l_2$, то $f_1(x) = l_1 + \alpha_1(x)$ и $f_2(x) = l_2 + \alpha_2(x)$, где $\alpha_1(x) \to 0$ и $\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to c$. Отсюда $f_1(x)f_2(x) = l_1 l_2 + l_1\alpha_2(x) + l_2\alpha_1(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x)$. Из предыдущих теорем следует, что $l_1\alpha_2(x) + l_2\alpha_1(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to c$. Таким образом, $f_1(x)f_2(x)$ отличается от $l_1 l_2$ на бесконечно малую при $x \to c$. Значит, $f_1(x)f_2(x) \to l_1 l_2$ при $x \to c$. Утверждение доказано.

Пример 1. Найти

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + x)(x^3 - 4).$$

В соответствии с утверждением теоремы о пределе произведения имеем $x^2 \to 4$ и $x^3 \to 8$ при $x \to 2$. Далее, из утверждений о пределе суммы и разности получаем $x^2 + x \to 6$ и $x^3 - 4 \to 4$ при $x \to 2$. Поэтому оказывается, что

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + x)(x^3 - 4) = 6 * 4 = 24.$$

Обычно такие подробные рассуждения никто не записывает, а просто в написанное выражение подставляют предельные значения аргумента и проводят соответствующие арифметические операции, если они допустимы.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^3-x^2-5x-2}{3x^2+2x+4}=\frac{128-16-20-2}{48+8+4}=\frac{3}{2}.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{2x^2+x-21}.$$

При $x=3$ числитель и знаменатель написанной дроби равны нулю. Поэтому применить утверждение о пределе частного нельзя. Однако, поскольку $x=3$ является корнем числителя и корнем знаменателя, постольку числитель и знаменатель должны содержать множитель $x-3$. Действительно, $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$ и $2x^2+x-21=(x-3)(2x+7)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{2x^2+x-21}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+5)}{(x-3(2x+7)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{2x+7}=\frac{8}{13}.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^2+6}{2x^3+2x-1}.$$

Здесь невозможно в дробь подставить предельное значение x, так как оно не существует. Поэтому преобразуем дробь, разделив все ее члены на x^3. Получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^2+6}{2x^3+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^3}}{2+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2},$$

поскольку дроби $\dfrac{4}{x}$, $\dfrac{6}{x^3}$, $\dfrac{2}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^3}$ являются бесконечно малыми при $x\to+\infty$.

Теорема 2 (об ограниченности функции, имеющей конечный предел). Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x\to c$, то она ограничена в некоторой окрестности точки c.

Доказательство. Пусть $f(x)\to l$ при $x\to c$. Возьмем $\varepsilon=1$. В соответствии с определением предела, для этого $\varepsilon=1$ найдется такое $\delta>0$, что при $\forall x\in(c-\delta,c)+(c,c+\delta)$ будет выполняться неравенство $l-1<f(x)<l+1$. Значит, $f(x)$ ограничена в δ-окрестности точки c. Теорема доказана.

Теорема 3 (сохранение знака функции, имеющей предел). Если функция $f(x)$ имеет положительный предел l при $x\to c$, то она будет положительна в некоторой окрестности точки c.

Доказательство. Зная, что $l > 0$, возьмем $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что при $\forall x \in (c-\delta, c) + (c, c+\delta)$ будет выполняться неравенство $\dfrac{l}{2} < f(x) < \dfrac{3l}{2}$. Так как $\dfrac{l}{2} > 0$, то и $f(x) > 0$ во всех точках δ-окрестности точки c. Теорема доказана.

Теорема 4 (предельный переход в неравенстве). Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют общую область задания и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$. Тогда, если $f_1(x) \to l_1$ и $f_2(x) \to l_2$ при $x \to c$, то $l_1 \leqslant l_2$.

Доказательство. Допустим обратное, что $l_2 < l_1$, и возьмем положительное ε таким, чтобы выполнялось неравенство $l_2 + \varepsilon < l_1 - \varepsilon$. Для этого ε найдется такое $\delta > 0$, что при $\forall x \in (c-\delta, c) + (c, c+\delta)$ будут выполняться неравенства $l_1 - \varepsilon < f_1(x) < l_1 + \varepsilon$ и $l_2 - \varepsilon < f_2(x) < l_2 + \varepsilon$. Сравнивая последние два неравенства и учитывая, что $l_2 + \varepsilon < l_1 - \varepsilon$, видим, что $f_2(x) < f_1(x)$. Это неравенство противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение о том, что $l_2 < l_1$, неверно. Следовательно, верно противоположное неравенство $l_1 \leqslant l_2$. Теорема доказана.

1.8. Сравнение функций

Определение. Если $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$ при $x \to c$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to c$.

Эквивалентность функций обозначают так: $f(x) \sim g(x) \quad (x \to c)$.

Нетрудно понять, что вблизи точки c значения эквивалентных функций $f(x)$ и $g(x)$ почти одинаковы.

Пример.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{a_n x^n} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}) = 1.$$

Таким образом, многочлен при $x \to \infty$ эквивалентен своему старшему члену, то есть при очень больших значениях x величины всех слагаемых многочлена пренебрежимо малы по сравнению со старшим слагаемым.

Если две функции эквивалентны, то каждую из них можно называть главной частью другой функции.

Заметим, что если $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to A$ при $x \to c$, то $f(x) \sim Ag(x) \quad (x \to c)$.

Определение. Если $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ при $x \to c$, то говорят, что $f(x)$ есть "о маленькое" от $g(x)$ при $x \to c$. В этом случае пишут так: $f(x) = o(g(x))\ \ (x \to c)$.

Запись $f(x) = o(g(x))$ $(x \to c)$ означает, что в окрестности точки c значения функции $f(x)$ пренебрежимо малы по сравнению со значениями функции $g(x)$.

Пример. Очевидно, $\dfrac{x^2}{x} \to 0$ при $x \to 0$. Значит, $x^2 = o(x)\ \ (x \to 0)$. Вместе с тем $\dfrac{x}{x^2} \to 0$ при $x \to \infty$. Следовательно, $x = o(x^2)\ \ (x \to \infty)$.

Докажем две теоремы, связанные со сравнением функций.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие эквивалентности). Условие $f(x) - g(x) = o(g(x))\ \ (x \to c)$ необходимо и достаточно для того, чтобы было $f(x) \sim g(x)\ \ (x \to c)$.

Доказательство. Пусть $f(x) \sim g(x)\ \ (x \to c)$, то есть $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$ при $x \to c$. Тогда

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 1 - 1 = 0,$$

а это означает, что $f(x) - g(x) = o(g(x))\ \ (x \to c)$.

Теперь предположим, что $f(x) - g(x) = o(g(x))\ \ (x \to c)$. Тогда $f(x) = g(x) + o(g(x))\ \ (x \to c)$. Отсюда

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = \lim_{x\to c} \left(1 + \frac{o(g(x))}{g(x)} \right) = 1 + 0 = 1,$$

то есть $f(x) \sim g(x)\ \ (x \to c)$. Теорема доказана.

Теорема 2 (замена числителя и знаменателя дроби эквивалентными). Предел дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель заменить эквивалентными им функциями (главными частями).

Доказательство. Пусть $f_1 x) \sim f_2(x)$ и $g_1 x) \sim g_2(x)$ при $x \to c$. Тогда

$$\lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \frac{g_2(x)}{g_1(x)} = 1 \cdot \lim_{x\to c} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \cdot 1 = \lim_{x\to c} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет во многих случаях заметно упростить нахождение пределов.

Пример. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+2x^3-x^2+7}{7x^4-3x^3+5x^2-9x+2}.$$

Как было показано выше, при $x\to\infty$ многочлен эквивалентен своему старшему члену. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+2x^3-x^2+7}{7x^4-3x^3+5x^2-9x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4}{7x^4}=\frac{4}{7}.$$

1.9. Два признака существования предела

Теорема 1 (о сжатой функции). Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ имеют общую область задания и $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant f_3(x)$. Тогда, если при $x\to c$ функции $f_1(x)$ и $f_3(x)$ имеют пределом число l, то и $f_2(x)$ имеет при $x\to c$ предел l.

Доказательство. Если $f_1(x)\to l$ и $f_3(x)\to l$ при $x\to c$, то, в соответствии с определением предела, для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ такое, что при $\forall x\in(c-\delta,c)+(c,c+\delta)$ выполняются неравенства

$$l-\varepsilon<f_1(x)<l+\varepsilon \;\text{ и }\; l-\varepsilon<f_3(x)<l+\varepsilon.$$

Поскольку $f_2(x)$ заключено между $f_1(x)$ и $f_3(x)$, постольку и для $f_2(x)$ должно выполняться неравенство $l-\varepsilon<f_2(x)<l+\varepsilon$. Это означает, что $f_2(x)\to l$ при $x\to c$. Теорема доказана.

Прежде чем формулировать еще один признак существования предела, дадим некоторые определения.

Определение. Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке $[a,b]$, если на этом промежутке из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется строго возрастающей на промежутке $[a,b]$, если на этом промежутке из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)<f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке $[a,b]$, если на этом промежутке из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)\geqslant f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется строго убывающей на промежутке $[a,b]$, если на этом промежутке из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Как возрастающие, так и убывающие функции называют монотонными (соответственно, строго монотонными).

Теорема 2 (о монотонной ограниченной функции). Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a, c)$. Если она возрастает и ограничена сверху на этом промежутке, то она имеет предел при $x \to c - 0$.

Доказательство. Так как $f(x)$ ограничена сверху, то ее значения на промежутке $[a, c)$ имеют точную верхнюю границуM_*. По свойству точной верхней границы, для $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое значение $f(x)$, которое окажется больше, чем $M_* - \varepsilon$ (но будет не больше M_*). Обозначим это значение функции через $f(c - \delta)$, где $c - \delta$ - некоторая точка из $[a, c)$. Тогда мы можем написать: $M_* - \varepsilon < f(c - \delta) < M_*$. Так как $f(x)$ возрастает, то последнее неравенство будет выполнено и при $\forall x \in (c - \delta, c)$. Итак, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что при всех $x \in (c - \delta, c)$ значения $f(x)$ отличаются от M_* меньше, чем на ε. Значит, M_* является пределом $f(x)$ при $x \to c - 0$. Теорема доказана.

Заметим, что функция $f(x)$ не превосходит своего предела.

Естественно, что аналогичное утверждение остается в силе, если функция убывает и ограничена снизу, причем она оказывается не меньше своего предела.

В дальнейшем мы будем неоднократно использовать эти признаки.

1.10. Один важный предел

Докажем вначале, что при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ справедливо неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Действительно, из рис. 2 хорошо видно, что площади нарисованных фигур удовлетворяют неравенству

$$S_{OAB} < S_{\text{сект}} < S_{OAC}.$$

Пусть $OA = OB = R$. Тогда, как легко увидеть, $S_{OAB} = \frac{1}{2}R^2 \sin x$, $S_{\text{сект}} = \frac{1}{2}R^2 x$, $\quad S_{OAC} = \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$. Поэтому неравенство принимает вид

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x.$$

Сокращая все части на $\frac{1}{2}R^2$, получаем

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

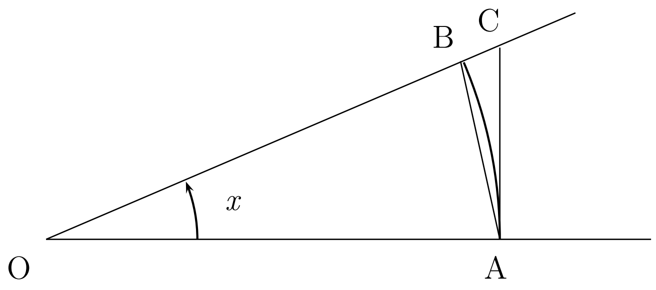

Рис. 2.

Неравенство доказано.

Разделим все части неравенства на $\sin x$. Получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

При $x \to +0$ будет $\cos x \to 1$. Таким образом, в нашем неравенстве левая часть равна 1, а правая стремится к 1 при $x \to +0$. В таком случае, в соответствии с теоремой о сжатой функции, $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to +0$.

Если мы заменим x на $-x$, то дробь $\dfrac{\sin x}{x}$ не изменится. Поэтому $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to -0$. Это дает нам право написать, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Мы нашли очень полезный для дальнейшего предел.

Полученное можно записать так: $\sin x \sim x \quad (x \to 0)$.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Таким образом, $\operatorname{tg} x \sim x \quad (x \to 0)$.

Пример 2. Найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Мы знаем, что $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$. Далее, $\sin\dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x}{2}$ при $x\to 0$. Поэтому $\sin^2\dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x^2}{4}$, а $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$. Теперь, заменяя числитель дроби эквивалентной величиной, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что при решении задачи мы попутно получили одно весьма полезное отношение эквивалентности: $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}\ \ (x\to 0)$.

1.11. Понятие касательной

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$ и построен ее график (рис. 3).

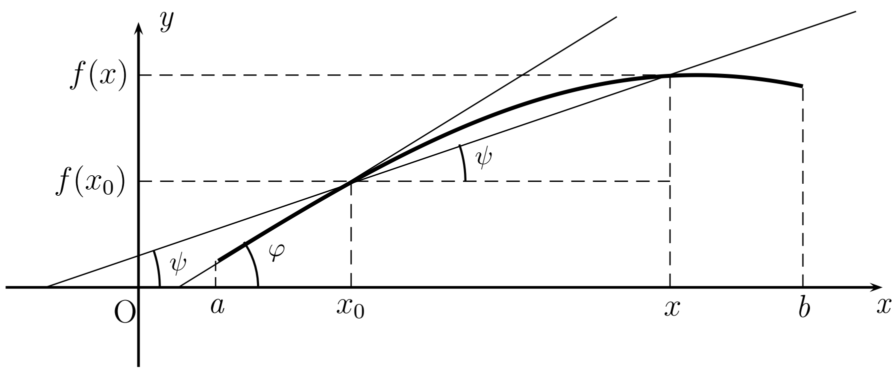

Рис. 3. Касательная

Возьмем на этом графике две точки: $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$. Через эти две точки проведем секущую к графику. Затем устремим x к x_0. Тогда точка $(x, f(x))$ будет вдоль графика двигаться к точке $(x_0, f(x_0))$, а секущая в пределе превратится в прямую, которую называют касательной.

Обозначим через φ угол наклона касательной к оси $0x$, а через ψ угол наклона секущей и найдем угловой коэффициент касательной

$k = \operatorname{tg}\varphi$.Очевидно, что $\psi \to \varphi$ при $x \to x_0$, а потому $\operatorname{tg}\psi \to \operatorname{tg}\varphi$ при $x \to x_0$. Но $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Следовательно,

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

В дальнейшем мы угол наклона касательной будем называть углом наклона графика в точке $(x_0, f(x_0))$.

Вообще, углом между двумя кривыми при их пересечении мы будем называть угол между их касательными в точке пересечения.

Пример. Найдем угол между синусоидой $y = \sin x$ и осью Ox в начале координат.

Взяв на графике две точки $(0, 0)$ и $(x, \sin x)$, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

откуда $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

1.12. Число e

Мы знаем, что график любой показательной функции $y = a^x$ проходит через точку $(0, 1)$. Если в этой точке провести касательную к графику, то угол наклона касательной к оси Ox будет зависеть от основания a.

Основание такой показательной функции, у которой касательная к графику в точке $(0, 1)$ образует с осью Ox угол $\dfrac{\pi}{4}$, принято обозначать через e (рис. 4).

Так как $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, то угловой коэффициент касательной должен быть равен 1.

Теперь возьмем на графике функции $y = e^x$ точки $(0, 1)$ и (x, e^x) и проведем через них секущую. Очевидно, что угловой коэффициент секущей равен

$$\frac{e^x - 1}{x}.$$

При $x \to 0$, как говорилось в предыдущем разделе, секущая превратится в касательную, а предел ее углового коэффициента будет равняться угловому коэффициенту касатательной. Значит, должно быть

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (*)$$

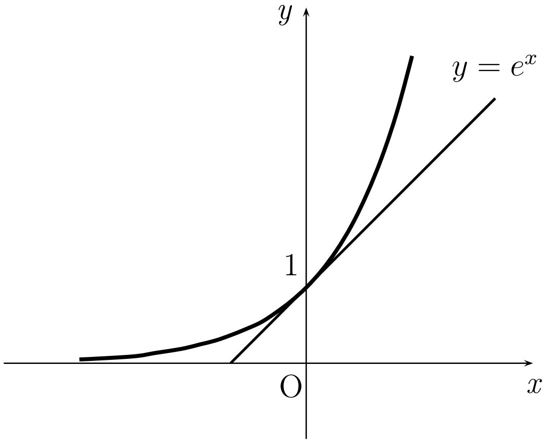

Рис. 4. График функции e^x

Теперь мы можем сказать так: e это такое число, для которого справедливо равенство $(*)$.

Позже мы увидим, как можно вычислить e с любой степенью точности, а пока приведем приближенное значение $e \approx 2,71828$.

Показательную функцию с основанием e, то есть $y = e^x$, часто называют экспонентой и пишут так: $y = \exp x$.

Логарифмы по основанию e называют натуральными. Для натуральных логарифмов обычно используют обозначение $y = \ln x$.

Нетрудно убедиться в том, что всякая показательная функция записывается с помощью экспоненты так:

$$a^x = e^{x \ln a},$$

а логарифмы, взятые по основанию a, можно выразить через натуральные следующим образом:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Например,

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0,434 \ln x.$$

Заметим, что из равенства $(*)$ следует такое соотношение эквивалентности: $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Это соотношение часто используется при нахождении пределов.

1.13. Несколько важных пределов

Используя предел $(*)$, можно найти еще несколько весьма полезных для дальнейшего пределов.

Во-первых, так как $a^x = e^{x\ln a}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}.$$

Если $x\to 0$, то $x\ln a\to 0$, а тогда $e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x} = \ln a.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,$$

а потому $a^x - 1\sim x\ln a \quad (x\to 0)$.

Теперь найдем предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Для этого сделаем замену: $z=\ln(1+x)$, из которой нетрудно увидеть, что $x = e^z - 1$. Видно также, что при $x\to 0$ будет $z\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = 1.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

то есть $\ln(1+x)\sim x \quad (x\to 0)$.

Далее,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(e^{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e.$$

Мы нашли еще один полезный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Если в последнем равенстве положить $x = \dfrac{1}{z}$, то оно примет вид:

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e.$$

Получим еще один предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x} = \mu.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu,$$

откуда $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x \quad (x\to 0)$.

Найденные нами пределы часто используются как в теории, так и при решении конкретных задач.

Пример 1. Найдем предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{2^{3x}-1}.$$

В соответствии с полученными выше эквивалентностями, можем написать, что $\sqrt[3]{1+x}-1 \sim \dfrac{1}{3}x$ и $2^{3x}-1 \sim 3x\ln 2$ при $x\to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{2^{3x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{9x\ln 2} = \frac{1}{9\ln 2}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} = ?$$

Так как $x\to 1$, то $x = 1+z$, где $z\to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^m-1}{(1+z)^n-1} = \lim_{z\to 0}\frac{mz}{nz} = \frac{m}{n}.$$

Пример 3. Найдем

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin x}-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-1}.$$

Для решения положим $x = \pi + z$. Тогда $z\to 0$ и

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin x}-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-1} = \lim_{z\to 0}\frac{e^{\sin(\pi+z)}-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(\pi+z)}-1} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{e^{-\sin z} - 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} z} - 1}.$$

Так как $\sin z \to 0$ и $\operatorname{tg} z \to 0$ при $z \to 0$, то $e^{-\sin z} - 1 \sim -\sin z$ и $\sqrt{1+\operatorname{tg} z} - 1 \sim \frac{1}{2}\operatorname{tg} z$. Отсюда

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z}{\operatorname{tg} z} = -2.$$

1.14. Понятие непрерывности функции

Пусть x_0 - точка, лежащая внутри области задания функции $f(x)$. Мы будем называть $f(x)$ непрерывной в точке x_0, если выполняется равенство

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Иначе говоря, $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если вспомнить определение предела, то можно понятие непрерывности сформулировать на языке "ε, δ" :

функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$ такое, что при $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Введем разности $\Delta x_0 = x - x_0$ и $\Delta f(x_0) = f(x_0) - f(x)$, которые будем называть соответственно приращениями аргумента и функции в точке x_0. Ясно, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда разность $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x_0 \to 0$. Это дает нам возможность дать такое определение непрерывности:

функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Таким образом, мы получили четыре равносильных определения непрерывности функции в точке.

Замечание. Можно ввести понятие односторонней непрерывности. Например, если $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0-0$, то функция $f(x)$ называется непрерывной слева в точке x_0. Аналогично вводится непрерывность справа. Очевидно, что если функция непрерывна слева и справа в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$.

Доказательство. Эта теорема является частным случаем теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного. Действительно, непрерывность $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 означает, что $f(x) \to f(x_0)$ и $g(x) \to g(x_0)$ при $x \to x_0$. Тогда $f(x) \pm g(x) \to f(x_0) \pm g(x_0)$, $f(x)g(x) \to f(x_0)g(x_0)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$, если $g(x_0) \neq 0$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, $z = g(y)$, $z_0 = g(y_0)$. Тогда если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0, то есть суперпозиция непрерывных функций непрерывна.

Доказательство. Возьмем x_0 и найдем y_0, по которому получим z_0. Дадим x_0 некоторое приращение Δx_0. Оно вызовет приращение Δy_0, которое, в свою очередь, породит приращение Δz_0. Если $\Delta x_0 \to 0$, то $\Delta y_0 \to 0$ из-за непрерывности функции f. Но при $\Delta y_0 \to 0$ будет $\Delta z_0 \to 0$, так как непрерывна функция g. Таким образом, оказывается $\Delta z_0 \to 0$ при $\Delta x_0 \to 0$. Значит, суперпозиция непрерывна. Теорема доказана.

Приведем некоторые примеры непрерывных функций.

Функция $y = C$, где C - константа, непрерывна при всяком $x \in R$, так как $\Delta y = 0$ при всех x.

Если $y = x$, то $\Delta y = \Delta x$, а потому $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ для любого $x \in R$. Значит, функция $y = x$ непрерывна во всех точках естественной области задания.

Далее, функция $y = x^n$, где n - целое положительное число, тоже непрерывна при $\forall x \in R$, поскольку она является произведением непрерывных функций.

Из сказанного ясно, что любой многочлен $P_n(x)$ непрерывен при $\forall x \in R$, так как он получен из непрерывных функций с помощью арифметических операций.

Отсюда следует, что всякая рациональная дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ непрерывна при всех x, кроме тех, что являются корнями знаменателя.

Можно формально доказать, что функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$

непрерывны при всех $x \in R$. Действительно, при $\forall x$ и $\forall \Delta x$ имеем

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Так как $|\cos(x + \frac{\Delta x}{2})| \leq 1$, то $|\Delta y| \leq 2|\sin \frac{\Delta x}{2}|$. В силу неравенства, доказанного в разделе 1.10, $|\sin \frac{\Delta x}{2}| \leq |\frac{\Delta x}{2}|$. Следовательно, $|\Delta y| \leq |\Delta x|$, а потому $|\Delta y| \to 0$ при $|\Delta x| \to 0$. Это означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна при $\forall x \in R$. Аналогично доказывается непрерывность косинуса. Из непрерывности синуса и косинуса следует непрерывность $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ при всех x, кроме тех, где знаменатель равен нулю.

Можно доказать, что все основные элементарные функции непрерывны при всех x из области естественного определения. Из этого следует, что все элементарные функции непрерывны в своих естественных областях задания, поскольку они строятся из основных элементарных функций с помощью арифметических операций и суперпозиций.

Если функция непрерывна во всех точках некоторого промежутка, то она называется непрерывной на этом промежутке. Мы приведем без доказательства некоторые свойства функций, непрерывных на промежутке.

Теорема Коши (A. L. Cauchi, 1789-1857) о промежуточном значении непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$ и $f(a) < f(b)$. Тогда для любого числа Q, удовлетворяющего неравенству $f(a) < Q < f(b)$, найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = Q$.

Иначе говоря, непрерывная функция, переходя от одного своего значения к другому, принимает и все промежуточные значения.

Теорема Вейерштрасса (K. T. W. Weierstrass, 1815-1897). Если функция непрерывна на замкнутом промежутке, то она ограничена на этом промежутке и принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения.

В этой теореме существенно, что функция непрерывна на замкнутом промежутке. Для незамкнутого промежутка утверждение может оказаться неверным. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на промежутке $(0, 1)$, но не ограничена на нем, так как $y \to \infty$ при $x \to 0$.