А. И. Буфетов, М. В. Житлухин,
Н. Е. Козин

Диаграммы Юнга и их предельная форма

МЦНМО

УДК 511.33
ББК 22.132
Б93

Буфетов А. И., Житлухин М. В., Козин Н. Е.
Диаграммы Юнга и их предельная форма
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2017
55 с.
ISBN 978-5-4439-2333-8

Брошюра посвящена асимптотическим свойствам диаграмм Юнга — картинок на клетчатой бумаге, изображающих разбиение натурального числа в сумму нескольких слагаемых. В ней доказывается, что типичная (в смысле меры Планшереля) диаграмма Юнга большого размера имеет форму, близкую к некоторой фиксированной.

Брошюра написана по материалам цикла лекций на Летней школе «Современная математика» в Дубне в 2010 г. Она доступна студентам младших курсов и школьникам старших классов.

Подготовлено на основе книги: *А. И. Буфетов, М. В. Житлухин, Н. Е. Козин*. Диаграммы Юнга и их предельная форма. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2017. — ISBN 978-5-4439-2504-2.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2333-8

Оглавление

§ 1. Диаграммы Юнга

Разбиением натурального числа принято называть его представление в виде суммы нескольких слагаемых. Расположим слагаемые в порядке убывания. Например,

$$11=5+3+1+1+1$$

или

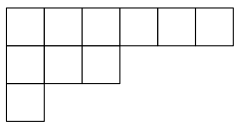
$$11=6+4+1.$$

Если считать единицу за базовый «строительный элемент» натуральных чисел,

$$1=\boxed{}\,,$$

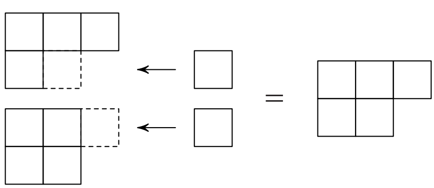
то каждое число можно наглядно представить в виде кирпичиков-клеток единиц, объединенных вместе. *Диаграммы Юнга* дают способ графического представления разбиения:

$$10=6+3+1=$$



Идея такого представления очевидна из рисунка: число строк, состоящих ровно из одной клетки, есть число единиц в данном разбиении; число строк ровно из двух клеток есть число двоек в разбиении и т. д. Добавив требование, чтобы длина строк в каждой диаграмме не возрастала сверху вниз, получим однозначное представление каждого разбиения натурального числа N диаграммой Юнга. Далее, диаграмму λ, состоящую из N клеток, будем называть диаграммой *размера* N.

Понятно, что каждая диаграмма размера N может быть получена путем добавления к одной из диаграмм размера $N-1$ дополнительной клетки справа в одну из строк. Как показывает следующий пример, таких «диаграмм-предшественниц» может оказаться несколько:



При этом добавлять клетки в строки, начиная со второй, можно только при условии, что над добавленной клеткой не оказывается пустого пространства. Теперь, если начать строить диаграммы, взяв за основу диаграмму размера один, то мы получим граф, начальные уровни которого

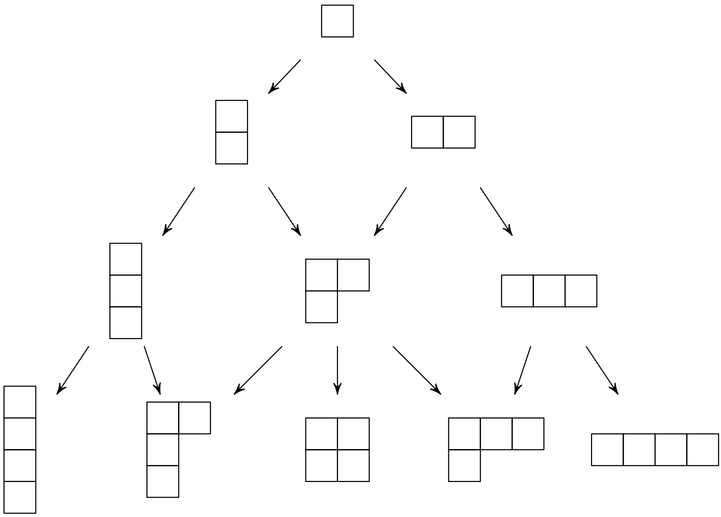


Рис. 1. Фрагмент графа Юнга до размера $N=4$

изображены на рис. 1. Его принято называть *графом Юнга*. Легко заметить, что если продолжать построение графа, то среди получившихся диаграмм одного размера всегда будут присутствовать диаграммы, состоящие ровно из одной строки, соответствующие разбиению

$$N=N$$

и одного столбца, соответствующие разбиению

$$N=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{N\text{ раз}}.$$

Очевидно, что из корневой вершины графа в такие диаграммы всегда будет вести только один путь. Нас же будет интересовать вопрос, какую (примерно) форму имеют все диаграммы, в которые ведёт большинство путей (и существует ли вообще такая форма).

Чтобы сформулировать вопрос более точно, введем меру $\mu(\lambda)$ на множестве диаграмм данного размера N. Используя символ $\dim\lambda$ (*размерность*[1] диаграммы) для обозначения числа путей, ведущих в диа-

[1]Использование обозначения dim, как и термина «размерность», здесь обусловлено связью с теорией представлений. Число путей, ведущих в диаграмму λ, равно размерности соответствующего ей представления симметрической группы (группы перестановок N символов).

грамму λ, определим так называемую *меру Планшереля*:

$$\mu(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{N!}. \tag{1.1}$$

В § 6 (см. лемму 9 и обсуждение после неё) мы установим, что мера Планшереля является вероятностной мерой на множестве всех диаграмм заданного размера: сумма мер всех диаграмм размера N будет всегда равняться единице.

Обратимся к построению диаграмм путем добавления клеток. Спускаясь по графу к выбранной диаграмме λ, будем последовательно нумеровать добавляемые клетки. Таким образом каждому пути, ведущему в данную диаграмму, мы сопоставим новый объект: диаграмму с пронумерованными клетками (рис. 2). Легко заметить, что в каждой строке и каждом столбце полученной диаграммы (при движении слева направо и сверху вниз соответственно) числа возрастают. Диаграмма с такой нумерацией клеток называется *таблицей Юнга*.

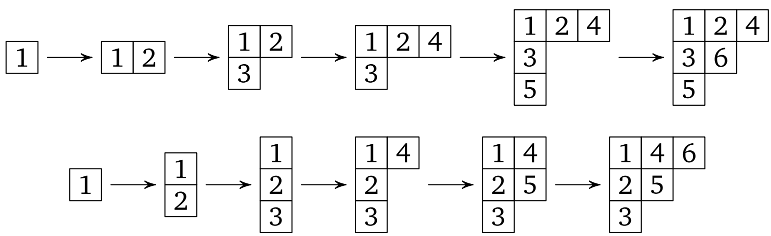


Рис. 2. Два различных пути построения диаграммы размера $N = 6$

Обратно, легко видеть, что любая нумерация, удовлетворяющая такому ограничению, соответствует некоторому пути в графе Юнга. Таким образом, число путей $\dim \lambda$, ведущих в диаграмму λ размера N, будет равно числу таблиц Юнга данной формы — то есть числу способов размещения чисел от 1 до N в клетках диаграммы λ так, чтобы выполнялось указанное правило возрастания номеров.

Последнее понятие, которое нам понадобится на начальном этапе — это понятие крюка. *Крюком клетки* $\square$ в диаграмме λ являтся сама клетка $\square$ вместе со всеми клетками, расположенными от нее справа в той же строке и снизу в том же столбце. *Длиной крюка* клетки $\square$ называется число составляющих этот крюк клеток. В дальнейшем длину крюка клетки $\square$ будем обозначать как $h(\square)$ (от англ. hook — крюк). На рис. 3 показан пример крюка одной из клеток диаграммы размера $N = 33$.