С. В. Поршнев
И. В. Беленкова

Численные методы на базе Mathcad

- **Курс лекций, соответствующий государственному образовательному стандарту**
- **Лабораторные работы по всем темам курса**
- **Программная реализация рассмотренных методов**
- **Основные приемы работы с пакетом Mathcad**

+CD

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

bhv

С. В. Поршнев, И. В. Беленкова

Численные методы на базе Mathcad

Допущено Учебно-методическим объединением по специальностям педагогического образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 030100 — "Информатика"

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2005

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
П59

Поршнев С. В., Беленкова И. В.

П59 Численные методы на базе Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 464 с.: ил.

ISBN 5-94157-610-2

В пособии изложены необходимые начальные сведения о терминологии и методах вычислительной математики. Рассмотрены уравнения и системы уравнений, задачи интерполяции и аппроксимации, численное интегрирование и дифференцирование, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения. Для каждого из рассмотренных в книге примеров приводится их программная реализация, созданная в пакете Mathcad, наглядные графические представления результатов вычислений, а также описания соответствующих функций пакета и примеры их использования. Компакт-диск содержит программные реализации каждого их рассмотренных методов, а также соответствующие примеры выполнения лабораторных работ.

Для студентов и преподавателей вузов

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Алексей Семенов*
Компьютерная верстка	*Татьяны Олоновой*
Корректор	*Наталия Першакова*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Рецензенты:
Подчиненов И. Е., к. ф.-м. н., директор Информационного центра Уральского государственного педагогического университета (г. Екатеринбург);
Литвиненко Н. А., к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой информационных технологий Нижнетагильского технологического института Уральского государственного технического университета — УПИ (г. Нижний Тагил).

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 11.07.05.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 37,41.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО "Техническая книга"
190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29

ISBN 5-94157-610-2

Оглавление

Введение **1**

ЧАСТЬ I. ЛЕКЦИИ **3**

Лекция № 1. Теория погрешностей **5**

1.1.1. Источники и классификация погрешностей 5
1.1.2. Абсолютная и относительная погрешности. Формы записи данных 7
1.1.3. Вычислительная погрешность 9
1.1.4. Понятие погрешности машинных вычислений 10

Лекция № 2. Решение уравнений с одной переменной **15**

1.2.1. Постановка задачи 15
1.2.2. Отделение корней 16
1.2.3. Метод половинного деления 17
1.2.4. Метод простой итерации 20
1.2.5. Оценка погрешности метода простой итерации 23
1.2.6. Преобразование уравнения к итерационному виду 24
1.2.7. Решение уравнений методом простой итерации в пакете Mathcad 24

Лекция № 3. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений **27**

1.3.1. Общие сведения и основные определения 27
1.3.2. Метод Гаусса и его реализация в пакете Mathcad 28
1.3.3. Вычисление определителей 32
1.3.4. Решение систем линейных уравнений методом простой итерации 34
1.3.5. Метод Зейделя 40

Лекция № 4. Методы решения систем нелинейных уравнений 44

1.4.1. Векторная запись нелинейных систем. Метод простых итераций 44
1.4.2. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений 48
1.4.3. Решение нелинейных систем методами спуска 52
1.4.4. Модифицированный метод Ньютона 67

Лекция № 5. Интерполирование функций 73

1.5.1. Постановка задачи 73
1.5.2. Интерполяционный полином Лагранжа 76
1.5.3. Интерполяционный полином Ньютона для равноотстоящих узлов 78
1.5.4. Погрешность интерполяции 82
1.5.5. Сплайн-интерполяция 83

Лекция № 6. Численное дифференцирование и интегрирование 90

1.6.1. Дифференцирование функций, заданных аналитически 90
1.6.2. Особенности задачи численного дифференцирования функций, заданных таблично 93
1.6.3. Интегрирование функций, заданных аналитически (формула прямоугольников, формула трапеций, формула Симпсона) 94
1.6.4. Погрешность численного интегрирования 98
1.6.5. Вычисление интегралов методом Монте-Карло 101

Лекция № 7. Методы обработки экспериментальных данных 104

1.7.1. Метод наименьших квадратов 104
1.7.2. Нахождение приближающей функции в виде линейной функции и квадратичного трехчлена 108
1.7.3. Нахождение приближающей функции в виде элементарных функций 112
1.7.4. Аппроксимация линейной комбинацией функций 115
1.7.5. Аппроксимация функцией произвольного вида 117

Лекция № 8. Преобразование Фурье 120

1.8.1. Разложение периодических функций в ряд Фурье 120
1.8.2. Эффект Гиббса 123
1.8.3. Спектральный анализ дискретных функций конечной длительности 128
1.8.4. Быстрое преобразование Фурье 129

Лекция № 9. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений 134

1.9.1. Постановка задачи 134
1.9.2. Метод Пикара 137

1.9.3. Метод Эйлера 139
1.9.4. Метод Рунге—Кутты 144

Лекция № 10. Численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных 150

1.10.1. Примеры уравнений 150
1.10.2. Типы уравнений 151
1.10.3. Численные методы решения эллиптических уравнений 153
1.10.4. Явные разностные схемы 158
1.10.5. Неявная разностная схема для уравнения параболического типа 163
1.10.6. Решение уравнений методом Монте-Карло 168

Лекция № 11. Численные методы решения интегральных уравнений 174

1.11.1. Общие сведения об интегральных уравнениях 174
1.11.2. Квадратурный метод решения интегральных уравнений Фредгольма 180
1.11.3. Квадратурный метод решения интегральных уравнений Вольтерры 184

ЧАСТЬ II. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ 193

Лабораторная работа № 1. Теория приближенных вычислений 195

2.1.1. Абсолютная и относительная погрешности 195
2.1.2. Погрешность округленного числа 198
2.1.3. Погрешности арифметических действий 200
2.1.4. Погрешности элементарных функций 202
2.1.5. Способ границ 205
2.1.6. Обратная задача теории погрешностей 210
2.1.7. Вопросы по теме 212
2.1.8. Задания к лабораторной работе № 1 213

Лабораторная работа № 2. Численные методы решения скалярных уравнений 220

2.2.1. Метод хорд 220
2.2.2. Метод касательных 223
2.2.3. Метод простой итерации 226
2.2.4. Вопросы по теме 230
2.2.5. Задания к лабораторной работе № 2 231

Лабораторная работа № 3. Численные методы решения систем линейных уравнений 234

2.3.1. Метод Гаусса—Жордана 235
2.3.2. Метод простой итерации 236

2.3.3. Метод Зейделя ... 241
2.3.4. Вопросы по теме ... 243
2.3.5. Задание к лабораторной работе № 3 ... 244

Лабораторная работа № 4. Численные методы решения систем нелинейных уравнений ... 248

2.4.1. Метод Ньютона ... 248
2.4.2. Задание к лабораторной работе № 4 ... 252

Лабораторная работа № 5. Приближение значения таблично заданной функции в точке с помощью интерполяционных многочленов ... 255

2.5.1. Интерполяционный полином Лагранжа ... 256
2.5.2. Интерполяционные полиномы Ньютона ... 259
2.5.3. Интерполирование сплайнами ... 262
2.5.4. Вопросы по теме ... 266
2.5.5. Задание к лабораторной работе № 5 ... 266

Лабораторная работа № 6. Обратное интерполирование ... 273

2.6.1. Обратное интерполирование с использованием формул Ньютона ... 273
2.6.2. Обратное интерполирование с использованием формулы Лагранжа ... 277
2.6.3. Вопросы по теме ... 278
2.6.4. Задание к лабораторной работе № 6 ... 278

Лабораторная работа № 7. Дискретный вариант среднеквадратичных приближений. Метод наименьших квадратов ... 282

2.7.1. Линейная функция ... 282
2.7.2. Квадратичная функция ... 285
2.7.3. Степенная функция ... 287
2.7.4. Показательная функция ... 288
2.7.5. Логарифмическая функция ... 290
2.7.6. Гиперболическая функция ... 291
2.7.7. Вопросы по теме ... 293
2.7.8. Задание для лабораторной работы № 7 ... 293

Лабораторная работа № 8. Численное дифференцирование ... 298

2.8.1. Дифференцирование с помощью интерполяционной формулы Лагранжа ... 298
2.8.2. Вопросы по теме ... 302
2.8.3. Задание к лабораторной работе № 8 ... 303

Лабораторная работа № 9. Численное интегрирование 304

2.9.1. Метод прямоугольников 305
2.9.2. Метод Симпсона 306
2.9.3. Метод трапеций 307
2.9.4. Метод Монте-Карло 308
2.9.5. Вопросы по теме 309
2.9.6. Задание к лабораторной работе № 9 310

Лабораторная работа № 10. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений 314

2.10.1. Метод Пикара 314
2.10.2. Метод Эйлера и его модификации 317
2.10.3. Метод Рунге—Кутты 320
2.10.4. Метод Адамса 322
2.10.5. Вопросы по теме 324
2.10.6. Задание к лабораторной работе № 10 325

Лабораторная работа № 11. Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных 329

2.11.1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток 329
2.11.2. Решение уравнения теплопроводности методом сеток 335
2.11.3. Решение уравнения колебания струны методом сеток 338
2.11.4. Вопросы по теме 341
2.11.5. Задание к лабораторной работе № 11 342

Лабораторная работа № 12. Численное решение интегральных уравнений 352

2.12.1. Задание к лабораторной работе № 12 352

ПРИЛОЖЕНИЯ 355

Приложение 1. Основные приемы работы с пакетом Mathcad 357

П1.1. Основы работы с Mathcad 357
П1.2. Справочная информация в Mathcad 367
П1.3. Основы программирования 375
П1.4. Графические возможности Mathcad 380

Приложение 2. Аналитические методы решения дифференциальных уравнений в частных производных 394

П2.1. Точные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных 394

П2.2. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных 428
П2.3. Метод обратной задачи рассеяния 439

Приложение 3. Описание компакт-диска 445

Литература 447

Предметный указатель 449

Введение

Вторая половина XX в. была отмечена бурным развитием вычислительной техники и численных методов, в ходе которого происходило (и происходит сейчас) быстрое изменение взглядов на весь комплекс вопросов, связанных с применением компьютеров, в частности, на требования к численным методам. За многие годы накоплены обширные библиотеки научных подпрограмм, в первую очередь на языке FORTRAN, предназначенных для решения типовых задач (задачи линейной алгебры, интегрирование, решение дифференциальных уравнений и т. д.). Кроме того, в последние годы появился целый ряд различных математических пакетов, реализующих разнообразные численные методы, а также способных производить аналитические математические преобразования, наиболее известными из которых на сегодня являются пакеты: Mathematica (фирма Wolfram Research), Maple (фирма Waterloo Maple Inc.), MATLAB (фирма The MathWorks Inc.), Mathcad (фирма MathSoft Inc.).

Отмеченные обстоятельства не могут не повлиять на изменение подходов к преподаванию курса "Численные методы", содержание которого является одной из наиболее важных составляющих подготовки специалиста в области современных информационных технологий. С нашей точки зрения, современный курс должен сочетать в себе обязательное изучение теории численных методов и их практической реализации на ПК как путем написания собственных программ, их реализующих, так и использования средств современных математических пакетов. Такой подход позволит сформировать, с одной стороны, понимание математического содержания конкретного метода (границ его применимости, погрешности метода и т. д.) и умение использовать современные программные средства (наличие которых отнюдь не освобождает пользователя от необходимости изучения математики) — с другой. В данном подходе к преподаванию курса "Численные методы" весьма важным оказывается выбор базового программного средства.

Пакет Mathematica, по-видимому, является сегодня наиболее популярным среди ученых, особенно среди теоретиков. Пакет предоставляет широкие возможности в проведении символических (аналитических) преобразований, однако требует значительных ресурсов компьютера. Система команд пакета больше напоминает язык программирования.

Пакет Maple также весьма популярен. Кроме аналитических преобразований, пакет в состоянии решать задачи численно. Характерной особенностью пакета является то, что он позволяет конвертировать документы в формат LaTeX — стандартный формат подавляющего большинства научных издательств мирового класса. Кроме того, ряд других программных продуктов используют интегрированный символьный процессор Maple. Например, пакет подготовки научных публикаций Scientific WorkPlace (фирма TCI Software Research) позволяет обращаться к символьному процессору Maple, производить аналитические преобразования и встраивать полученные результаты в создаваемый документ.

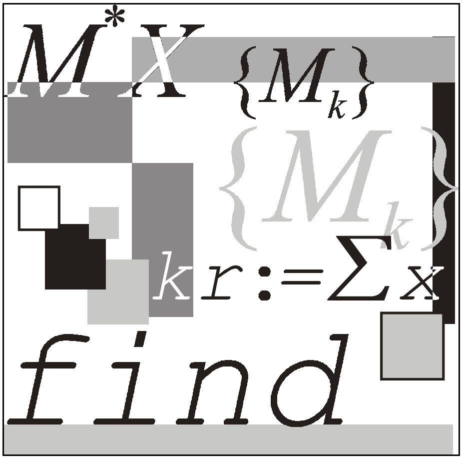
Подобно упомянутым выше пакетам, пакет MATLAB фактически представляет собой своеобразный язык программирования высокого уровня, ориентированный на решение научных задач. Характерной особенностью пакета является то, что он позволяет сохранять документы в формате языка программирования С.

Пакет Mathcad более популярен в инженерной, чем в научной, среде. Характерной особенностью пакета является использование привычных стандартных математических обозначений, т. е. вид документа на экране максимально приближен к общепринятой математической нотации. Для использования пакета не требуется изучать какую-либо систему команд, как, например, в случае пакетов Mathematica или Maple. Пакет ориентирован, в первую очередь, на проведение численных расчетов, но имеет встроенный символьный процессор Maple, что позволяет выполнять аналитические преобразования. В последних версиях предусмотрена возможность создавать связки документов Mathcad с документами MATLAB.

В отличие от упомянутых выше пакетов, Mathcad является средой визуального программирования, т. е. не требует знания специфического набора команд. Простота освоения пакета, дружественный интерфейс, относительная непритязательность к возможностям компьютера явились главными причинами того, что именно этот пакет был выбран нами для обучения студентов численным методам. При изложении основного материала мы ориентируемся на читателей, уже имеющих навык работы с данным пакетом.

Отбор численных методов, рассматриваемых в лекционном курсе, соответствует содержанию Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Отметим, что в известных методиках преподавания курса "Численные методы", с нашей точки зрения, существует определенный разрыв между теорией методов и формированием умения их практической реализации. Попытка его преодоления предпринята в нашем курсе, который состоит из двух частей: курса лекций и соответствующего ему курса лабораторных работ.

Авторы выражают искреннюю благодарность фирме SoftLine, предоставившей С. В. Поршневу лицензионную версию пакета Mathcad 11, с использованием которой были созданы представленные в книге тексты Mathcad-документов.



Часть I

Лекции

Лекция № 1

Теория погрешностей

План

- Источники и классификация погрешностей.
- Абсолютная и относительная погрешности. Формы записи данных.
- Вычислительная погрешность. Погрешность функции.
- Понятие погрешности машинной арифметики.

1.1.1. Источники и классификация погрешностей

Источниками возникновения погрешности численного решения задачи являются следующие факторы.

- Неточность математического описания, в частности, неточность задания начальных данных.
- Неточность численного метода решения задачи.

  Данная причина возникает, например, когда решение математической задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций, что приводит к необходимости ограничения их числа, т. е. использования приближенного решения.
- Конечная точность машинной арифметики.

Виды погрешностей

Все погрешности можно разделить на три вида:

- неустранимая погрешность;
- погрешность метода;
- вычислительная погрешность.

Результирующая погрешность определяется как сумма величин всех перечисленных выше погрешностей.

Неустранимая погрешность состоит из двух частей:

- погрешность, обусловленная неточностью задания числовых данных, входящих в математическое описание задачи;
- погрешность, являющаяся следствием несоответствия математического описания задачи реальной действительности (погрешность математической модели).

  Для вычислителя погрешность задачи следует считать неустранимой, хотя постановщик задачи иногда может ее изменить.

Погрешность метода связана со способом решения поставленной математической задачи. Она появляется в результате замены исходной математической модели другой и/или конечной последовательностью других более простых (например, линейных) моделей. При создании численных методов закладывается возможность отслеживания таких погрешностей и доведения их до сколь угодно малого уровня. Отсюда естественно отношение к погрешности метода как устранимой (или условной).

Вычислительная погрешность (погрешность округлений) обусловлена необходимостью выполнять арифметические операции над числами, усеченными до количества разрядов, зависящего от применяемой вычислительной техники.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий описанные виды погрешностей, на примере задачи описания движения маятника (рис. 1.1.1), в которой требуется предсказать угол отклонения маятника от вертикали θ, начинающего движение в момент времени $t = t_0$.

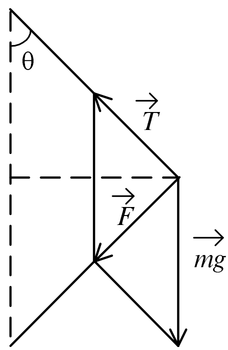


Рис. 1.1.1. Модель математического маятника

Движение маятника может быть описано дифференциальным уравнением второго порядка:

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta + \mu\frac{d\theta}{dt} = 0, \tag{1.1.1}$$

где l — длина маятника; g — ускорение свободного падения; μ — коэффициент трения.

Причины возникновения погрешностей в данной задаче.

- Реальная сила трения зависит от скорости движения маятника по нелинейному закону.
- Значения величин l, g, μ, t_0, $\theta(t_0)$, $\theta'(t_0)$ известны с некоторыми погрешностями.
- Для решения уравнения (1.1.1), не имеющего аналитического решения, приходится использовать численный метод, вследствие чего возникает погрешность метода.
- Вычислительная погрешность, возникающая вследствие конечной точности представления чисел в компьютере.

1.1.2. Абсолютная и относительная погрешности. Формы записи данных

Определение 1.1.1. Если a — точное значение некоторой величины и a^* — известное приближение к нему, то абсолютной погрешностью приближенного значения a^* называют некоторую величину $\Delta(a^*)$, про которую известно, что

$$\left|a^* - a\right| \le \Delta(a^*). \tag{1.1.2}$$

Определение 1.1.2. Относительной погрешностью приближенного значения называют некоторую величину $\delta(a^*)$, про которую известно, что

$$\left|\frac{a^* - a}{a^*}\right| \le \delta(a^*). \tag{1.1.3}$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Определение 1.1.3. Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Пример 1.1.1.

$a^* = 0{,}0\underline{3045}$ $\qquad a^* = 0{,}0\underline{3045000}$

Примечание

Здесь цифры, подчеркнутые линией, значащие.

Определение 1.1.4. Значащую цифру называют верной, если модуль погрешности числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Пример 1.1.2.

$a^* = 0{,}0\underline{3045} \quad \Delta(a^*) = 0{,}000003$

$a^* = 0{,}0\underline{30450000} \quad \Delta(a^*) = 0{,}00000007$

Примечание

Здесь цифры, подчеркнутые линией, верные.

Определение 1.1.5. Число записано со всеми верными цифрами, если в его записи представлены только верные значащие цифры.

Иногда употребляется термин *число верных цифр после запятой*: подсчитывается число верных цифр после запятой от первой цифры до последней верной цифры.

Довольно часто информация о некоторой величине задается пределами измерений

$$a_1 \le a \le a_2 .$$

Принято записывать эти пределы с одинаковым числом знаков после запятой, так как обычно достаточно грубого представления о погрешности. В записи чисел a_1, a_2 обычно берут столько значащих цифр, сколько нужно для того, чтобы разность $a_2 - a_1$ содержала одну-две значащие цифры.

Информацию о том, что a^* является приближенным значением числа a с абсолютной погрешностью $\Delta(a^*)$, принято также записывать в виде:

$$a = a^* \pm \Delta(a^*). \tag{1.1.4}$$

Числа a^*, $\Delta(a^*)$ принято записывать с одинаковым количеством знаков после запятой.

Пример 1.1.3.

$$\begin{cases} a = 1{,}123 \pm 0{,}004 \\ a = 1{,}123 \pm 4 \cdot 10^{-3} \\ 1{,}123 - 0{,}004 \le a \le 1{,}123 + 0{,}004 \end{cases}$$

Информацию о том, что a^* является приближенным значением числа a с относительной погрешностью $\delta(a^*)$, записывают в виде:

$$a = a^*\left(1 \pm \delta\left(a^*\right)\right).$$

Пример 1.1.4.

$1{,}123 \cdot (1 - 0{,}003) \le a \le 1{,}123 \cdot (1 + 0{,}003)$

Примечание

Данная запись числа эквивалентна записи чисел из примера 1.1.3.

1.1.3. Вычислительная погрешность

Далее для краткости будем обозначать абсолютную погрешность числа x как e_x, относительную погрешность — δ_x.

1. Погрешность суммирования чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$.

   Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x) + (y \pm e_y) = (x + y) \pm (e_x + e_y).$$

   Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{e_x + e_y}{|x + y|} = \frac{e_x}{|x + y|}\frac{|x|}{|x|} + \frac{e_y}{|x + y|}\frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x + y|}\delta_x + \frac{|y|}{|x + y|}\delta_y .$$

2. Погрешность вычитания чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$.

   Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x) - (y \pm e_y) = (x - y) \pm (e_x + e_y).$$

   Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{e_x + e_y}{|x - y|} = \frac{e_x}{|x - y|}\frac{|x|}{|x|} + \frac{e_y}{|x - y|}\frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x - y|}\delta_x + \frac{|y|}{|x - y|}\delta_y .$$

3. Погрешность умножения чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$.

   Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x) \cdot (y \pm e_y) = x \cdot y \pm y \cdot e_x \pm x \cdot e_y \pm e_x \cdot e_y \approx x \cdot y \pm y \cdot e_x \pm x \cdot e_y .$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{|y| \cdot e_x + |x| \cdot e_y}{|x \cdot y|} = \frac{e_x}{|x|} + \frac{e_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y .$$

4. Погрешность деления чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$.

Абсолютная погрешность:

$$z = \frac{x \pm e_x}{y \pm e_y} = \frac{(x \pm e_x) \cdot (y \pm e_y)}{(y \pm e_y) \cdot (y \pm e_y)} \approx \frac{x}{y} \pm \frac{y \cdot e_x + x \cdot e_y}{y^2} .$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{|y| \cdot e_x + |x| \cdot e_y}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{|y| \cdot e_x + |x| \cdot e_y}{y^2 \cdot \left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{e_x}{|x|} + \frac{e_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y .$$

5. Погрешность функции, зависящей от одной переменной.

Абсолютная погрешность:

$$f(x \pm e_x) \approx f(x) \pm f'(x) \cdot e_x ,$$

$$\Delta f = f(x \pm e_x) - f(x) = |f'(x)| \cdot e_x .$$

Относительная погрешность:

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right| = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} e_x .$$

Аналогично получают формулы для оценки абсолютной и относительной погрешностей для функций, зависящих от n переменных.

1.1.4. Понятие погрешности машинных вычислений

Для представления чисел в памяти компьютера применяют два способа:

- с фиксированной запятой[1];
- с плавающей запятой.

Пусть в основу запоминающего устройства положены однотипные физические устройства, имеющие r устойчивых состояний, при этом каждое из

[1] Здесь в обозначении устройств хранения информации мы используем устоявшуюся в отечественной литературе терминологию, в которой в качестве разделительного знака между целой и дробной частями числа используется запятая.

устройств состоит из одинакового количества элементов k, в одном из которых фиксируется знак числа. Упорядоченные элементы образуют разрядную сетку машинного слова: в каждом разряде может быть записано одно из базисных чисел $0, 1, \ldots, r-1$ (одна из r "цифр" r-ой системы счисления) и в специальном разряде отображен знак "+" или "–". При записи чисел с фиксированной запятой кроме упомянутых r параметров (основания системы счисления) и k (количество разрядов, отводимых под запись числа) указывается еще общее количество l разрядов, выделяемых под дробную часть числа. Таким образом, положительное вещественное число a, представляющее собой в r-ой системе бесконечную непериодическую дробь, отображающуюся конечной последовательностью

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-l}\alpha_{k-l+1}\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k,$$

где $\alpha_i \in \{0,\ 1,\ \ldots, r-1\}$,

т. е.

$$a^* \approx \alpha_1 r^{k-l-1} + \alpha_2 r^{k-l-2} + \ldots + \alpha_{k-l} r^0 + \alpha_{k-l+1} r^{-1} + \ldots + \alpha_{k-1} r^{-(l-1)} + \alpha_k r^{-l}.$$

Диапазон представляемых таким способом чисел определяется числами с наибольшими цифрами во всех разрядах, т. е. наименьшим числом $-(r-1)(r-1)\ldots(r-1)$ и наибольшим $(r-1)(r-1)\ldots(r-1)$, а абсолютная точность представления есть оценка величины $|a-a^*|$, зависящая от способа округления. Абсолютная точность представления вещественных чисел с фиксированной запятой одинакова в любой части диапазона. В то же время относительная точность может значительно различаться в зависимости от того, берется a близким к нулю или к границе диапазона.

Пример 1.1.5.

Рассмотрим запоминающее устройство с фиксированной запятой, состоящее из $k=7$ элементов и имеющее $r=10$ $(r=0,\ 1,\ldots,\ 9)$. Будем считать, что общее количество разрядов, выделяемых под дробную часть, $l=3$, под знак — один разряд, под целую часть — три разряда (рис. 1.1.2).

Рис. 1.1.2. Схема машинного слова запоминающего устройства с фиксированной запятой

Тогда наибольшее число, которое можно сохранить в данном запоминающем устройстве, равно 999,999, а наименьшее равно –999,999. У любого числа из указанного диапазона, являющегося бесконечной периодической дробью, вне зависимости от его величины после запятой сохраняется только 3 цифры. Поэтому абсолютная точность представления чисел $a_1 = 1{,}123456$ и $a_2 = 999{,}123456$ оказывается одинаковой:

$$\Delta_1 = 1{,}123456 - 1{,}123 = 0{,}000456,$$

$$\Delta_2 = 999{,}123456 - 999{,}123 = 0{,}000456.$$

Относительные погрешности представления этих чисел в запоминающем устройстве будут различны:

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{a_1} \approx 0{,}04\%,$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta_2}{a_2} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-4}\%.$$

В основе значительно чаще употребляемого представления *с плавающей запятой* лежит экспоненциальная форма записи числа:

$$a = M \cdot r^p,$$

где r — основание; p — порядок; M — мантисса $\left(r^{-1} \le |M| \le 1\right)$. Если под мантиссу выделяется l r-ичных элементов, а под порядок — m, то в системе записи с плавающей запятой вещественное число a представляется конечным числом

$$a^* \approx \pm\left(\beta_1 r^{-1} + \beta_2 r^{-2} + \ldots + \beta_l r^{-l}\right) \cdot r^{\gamma},$$

где γ — целое число из промежутка $\left[-r^m,\ r^m - 1\right]$; $\beta_1 \in \{1, \ldots, r-1\}$ $\beta_i \in \{0, 1, ..., r-1\}$, $i = 2, \ldots, l$.

Структура машинного слова запоминающего устройства с плавающей запятой представлена на рис. 1.1.3.

Знак порядка	Порядок числа (m разрядов)	Знак мантиссы	Мантисса числа (*l* разрядов)

Рис. 1.1.3. Схема машинного слова запоминающего устройства с плавающей запятой

Числа $\pm r^{\gamma^m}$ определяют границы допустимого числового диапазона.

Относительная точность представления вещественных чисел равна:

$$\left(\frac{a-a^*}{a}\right)=\frac{\beta_{l+1}r^{-(l+1)}+\beta_{l+2}r^{-(l+2)}+\ldots}{\beta_1 r^{-1}+\beta_2 r^{-2}+\ldots}\le\frac{r^{-l}}{\beta_1 r^{-1}}\le r^{1-l},$$

т. е. относительная точность одинакова в любой части числового диапазона и зависит лишь от числа разрядов, отводимых под мантиссу числа.

Например, для записи числа в 48-разрядном машинном слове БЭСМ-6 40 двоичных разрядов выделялись под мантиссу, 6 — под порядок числа и 2 — под знаки мантиссы, т. е. $r=2$, $l=40$, $m=6$. Следовательно, точность представления числа с плавающей запятой не хуже $2^{-39}\left(\approx 10^{-12}\right)$, граница машинного нуля — $2^{-64}\left(\approx 10^{-19}\right)$, машинной бесконечности — 2^{63}.

Пример 1.1.6.

Рассмотрим запоминающее устройство, состоящее из $k=8$ элементов и имеющее $r=10$ $\left(r=0,1,\ldots,9\right)$. Будем считать, что общее количество разрядов, выделяемых под дробную часть, — $l=5$, под знак порядка числа — 1 ячейка, под знак мантиссы числа — 1 ячейка, под порядок — 2 ячейки.

Оценим точность представления чисел $a_1=1{,}123123$ и $a_2=999{,}123123$.

Запишем числа в форме представления с плавающей запятой:

$$a_1=0{,}1123123\cdot 10^1,$$

$$a_2=0{,}999123123\cdot 10^3.$$

В запоминающем устройстве числа a_1, a_2 будут записаны в виде, показанном на рис. 1.1.4.

+	0	1	+	1	1	2	3	1
	Порядок числа			Мантисса числа				

+	0	3	+	9	9	9	1	2
	Порядок числа			Мантисса числа				

Рис. 1.1.4. Представление чисел a_1, a_2 в запоминающем устройстве с плавающей запятой

Абсолютные погрешности чисел равны:

$$\Delta_1 = (0{,}1123123 - 0{,}11231) \cdot 10^1 \approx \left(0{,}23 \cdot 10^{-5}\right) \cdot 10^1 ,$$

$$\Delta_2 = (0.999123123 - 0.99912) \cdot 10^3 \approx \left(0.31 \cdot 10^{-5}\right) \cdot 10^3 .$$

Относительные погрешности чисел равны:

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{a_1} = \frac{\left(0{,}23 \cdot 10^{-5}\right) \cdot 10^1}{0{,}1123 \cdot 10^1} \approx 2 \cdot 10^{-3}\% ,$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta_2}{a_2} = \frac{\left(0{,}31 \cdot 10^{-5}\right) \cdot 10^3}{0{,}99912 \cdot 10^3} \approx 3 \cdot 10^{-3}\% .$$

Лекция № 2

Решение уравнений с одной переменной

План

- ❒ Постановка задачи.
- ❒ Отделение корней.
- ❒ Метод половинного деления.
- ❒ Метод простой итерации.
- ❒ Оценка погрешности метода простой итерации.
- ❒ Преобразование уравнения к итерационному виду.
- ❒ Решение уравнений методом простой итерации в пакете Mathcad.

1.2.1. Постановка задачи

Наиболее общий вид нелинейного уравнения:

$$F(x) = 0\,, \tag{1.2.1}$$

где функция $F(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a, b]$.

Определение 1.2.1. Всякое число $\xi \in [a, b]$, обращающее функцию $F(x)$ в нуль, называется корнем уравнения (1.2.1).

Определение 1.2.2. Число ξ называется корнем k-ой кратности, если при $x = \xi$ вместе с функцией $F(x)$ равны нулю ее производные до $(k-1)$-го порядка включительно:

$$F(\xi) = F'(\xi) = \ldots = F^{(k-1)}(\xi) = 0\,. \tag{1.2.2}$$

Определение 1.2.3. Однократный корень называется простым.

Определение 1.2.4. Уравнения $F(x)=0$ и $G(x)=0$ называются равносильными (эквивалентными), если множества решений данных уравнений совпадают.

Нелинейные уравнения с одной переменной подразделяются на *алгебраические* и *трансцендентные*.

Определение 1.2.5. Уравнение (1.2.1) называется алгебраическим, если функция $F(x)$ является алгебраической.

Путем алгебраических преобразований из всякого алгебраического уравнения можно получить уравнение в канонической форме:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n, \qquad (1.2.3)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные коэффициенты уравнения; x — неизвестное.

Из алгебры известно, что всякое алгебраическое уравнение имеет, по крайней мере, один вещественный или два комплексно сопряженных корня.

Определение 1.2.6. Уравнение (1.2.1) называется трансцендентным, если функция $F(x)$ не является алгебраической.

Определение 1.2.7. Решить уравнение (1.2.1) означает следующее.

1. Установить имеет ли уравнение корни.
2. Определить число корней уравнения.
3. Найти значения корней уравнения с заданной точностью.

1.2.2. Отделение корней

Определение 1.2.8. Отделение корней — процедура нахождения отрезков, на которых уравнение (1.2.1) имеет только одно решение.

В большинстве случаев отделение корней можно провести графически. Для этого достаточно построить график функции $F(x)$ и определить отрезки, на которых функция $F(x)$ имеет только одну точку пересечения с осью абсцисс.

В сомнительных случаях графическое отделение корней необходимо подкреплять вычислениями. При этом можно использовать следующие очевидные положения:

- если непрерывная функция принимает на концах отрезка $[a,b]$ значения разных знаков (т. е. $F(a)\cdot F(b)<0$), то уравнение (1.2.1) имеет на этом отрезке по меньшей мере один корень;

- ❒ если функция $F(x)$ к тому же и строго монотонна, то корень на отрезке единственный.

1.2.3. Метод половинного деления

Пусть уравнение (1.2.1) имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень, причем функция $F(x)$ на данном отрезке непрерывна (рис. 1.2.1).

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $c = \dfrac{a+b}{2}$. Если $F(c) \neq 0$, то возможны два случая:

- ❒ функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[a, c]$;
- ❒ функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[c, b]$.

Выбирая в каждом случае тот отрезок, на котором функция меняет знак, и, продолжая процесс половинного деления дальше, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

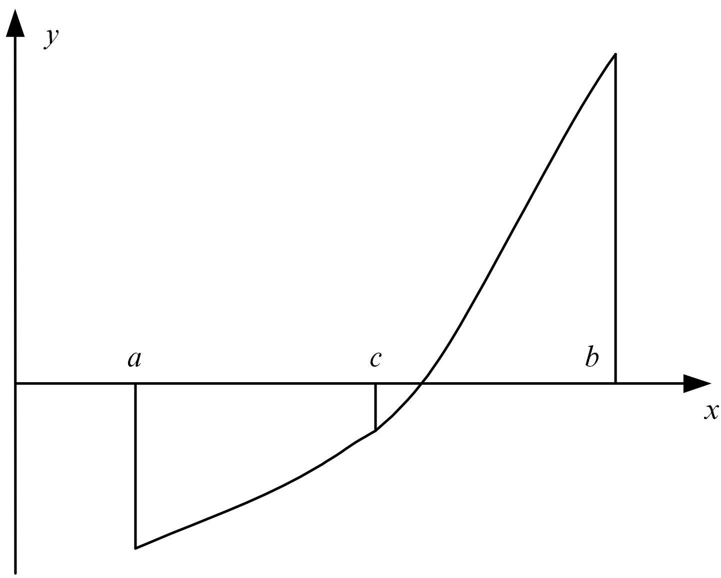


Рис. 1.2.1. К объяснению метода половинного деления

Пример 1.2.1.

Решение в пакете Mathcad методом половинного деления уравнения $x^4 - 11x^3 + x^2 + 0{,}1 = 0$.

1. Задание функции:

$$f(x) := x^4 - 11 \cdot x^3 + x^2 + x + 0.1$$

2. Построение графика функции (рис. 1.2.2).

$$x := -1, -1 + 10^{-3} .. 1.$$

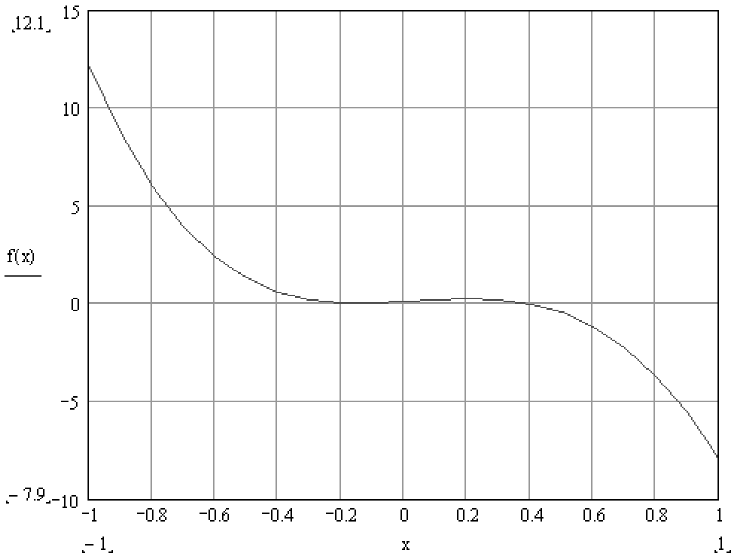


Рис. 1.2.2. График функции $f(x) = x^4 - 11x^3 + x^2 + x + 0{,}1$

3. Задание функции, реализующей метод половинного деления (рис. 1.2.3). Здесь аргументы функции: f — имя функции, $x1, x2$ — левая и правая координаты концов отрезка; ε — точность вычисления корня.

4. Вычисление значения корня уравнения:

$$q := Div2\left(f, 0.3, 1, 10^{-5}\right) \quad q = 0.39417$$

5. Проверка найденного значения корня:

$$f(q) = 1.457 \times 10^{-5}$$

Для рассмотрения процесса нахождения корня уравнения в динамике необходимо сохранить значение корня на каждом шаге вычислительной процедуры и построить зависимость значения корня от номера шага. Функция, возвращающая значение корня на каждом шаге метода половинного деления, представлена на рис. 1.2.4. Аргументы функции: f — имя функции, $x1, x2$ — левая и правая координаты концов отрезка, ε — точность вычисления корня

```
Div2(f,x1,x2,ε) := | L ← x2 − x1
                   | while L > ε
                   |   | c ← (x2 + x1)/2
                   |   | x2 ← c  if f(c)·f(x1) < 0
                   |   | x1 ← c
                   |   | L ← x2 − x1
                   | c
```

Рис. 1.2.3. Функция, реализующая метод половинного деления (файл Div2.mcd)

```
Div2I(f,x1,x2,ε) := | L ← x2 − x1
                    | i ← 0
                    | while L > ε
                    |   | c ← (x2 + x1)/2
                    |   | x2 ← c  if f(c)·f(x1) < 0
                    |   | x1 ← c  otherwise
                    |   | L ← x2 − x1
                    |   | R[i,0] ← i
                    |   | R[i,1] ← c
                    |   | i ← i + 1
                    | R
```

Рис. 1.2.4. Функция, реализующая метод половинного деления и возвращающая значение корня уравнения на каждом шаге процесса вычислений (файл Div2I.mcd)

После создания функции необходимо дополнить описанный выше документ следующей последовательностью команд.

1. Вычисление матрицы, первый столбец которой содержит номер итерации, второй — значение корня:

   $$Q := Div2I\left(f, 0.3, 1, 10^{-5}\right).$$

2. Визуализация зависимости значения корня от номера шага вычислительной процедуры (рис. 1.2.5).

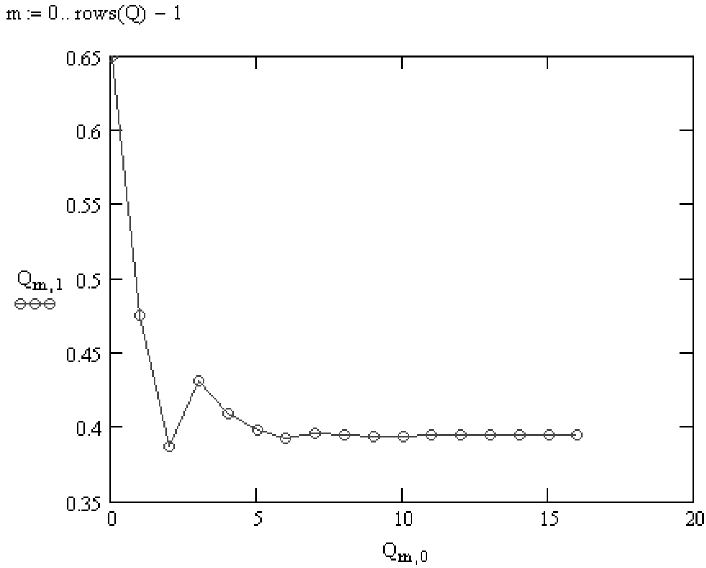


Рис. 1.2.5. Зависимость значения корня от номера шага вычислительной процедуры

1.2.4. Метод простой итерации

Заменим уравнение (1.2.1) равносильным уравнением

$$x = f(x). \tag{1.2.4}$$

Пусть ξ — корень уравнения (1.2.4), а x_0, полученное каким-либо способом нулевое приближение к корню ξ. Подставляя x_0 в правую часть уравнения (1.2.4), получим некоторое число $x_1 = f(x_0)$. Повторим данную процедуру с x_1 и получим $x_2 = f(x_1)$. Повторяя описанную процедуру, получим последовательность

$$x_0,\ x_1, \ldots, x_n, \ldots, \tag{1.2.5}$$

называемую итерационной последовательностью.

Геометрическая интерпретация данного алгоритма представлена на рис. 1.2.6.

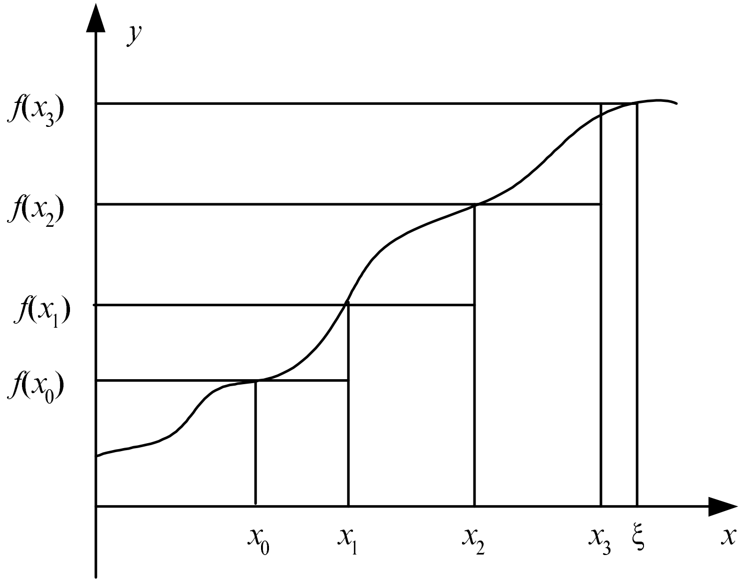


Рис. 1.2.6. К объяснению метода простой итерации

Итерационная последовательность, вообще говоря, может быть как сходящейся, так и расходящейся, что определяется видом функции $f(x)$.

Теорема 1.2.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а последовательность (1.2.5) сходится, то предел последовательности (1.2.5) является корнем уравнения (1.2.4).*

Действительно, пусть $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Перейдем к пределу в равенстве $x_n = f(x_{n-1})$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = f(\xi). \qquad (1.2.6)$$

Условие сходимости итерационного процесса определяется теоремой о достаточном условии сходимости итерационного процесса.

Теорема 1.2.2. *Пусть уравнение $x = f(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a, b]$ и выполнены условия:*

1. $f(x)$ *определена и дифференцируема на* $[a, b]$.

2. $f(x)\in[a,b]$ *для всех* $x\in[a,b]$.

3. *Существует такое вещественное* q *, что* $|f'(x)|\le q<1$ *для всех* $x\in[a,b]$.

Тогда итерационная последовательность $x_n=f(x_{n-1})$ $(n=1,2,...)$ *сходится при любом начальном приближении* $x_0\in[a,b]$.

Доказательство. Построим итерационную последовательность вида (1.2.5) с любым начальным значением $x_0\in[a,b]$. В силу условия 2 теоремы 1.2.2 все члены последовательности находятся в отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим два последовательных приближения $x_n=f(x_{n-1})$ и $x_{n+1}=f(x_n)$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(c)(x_n-x_{n-1}),\ c\in[x_{n-1},x_n].$$

Переходя к модулям и принимая во внимание условие 3 теоремы 1.2.2, получим

$$|x_{n+1}-x_n|=|f'(c)|\cdot|x_n-x_{n-1}|\le q|x_n-x_{n-1}|,$$

$$|x_{n+1}-x_n|\le q|x_n-x_{n-1}|.$$

При $n=1,2,...$ имеем

$$\begin{gathered}|x_2-x_1|\le q|x_1-x_0|,\\ |x_3-x_2|\le q\cdot|x_2-x_1|\le q^2|x_1-x_0|,\\ \dots\\ |x_{n+1}-x_n|\le q^n|x_1-x_0|.\end{gathered} \tag{1.2.7}$$

Рассмотрим ряд

$$x_0+(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})+\ldots \tag{1.2.8}$$

Составим частичные суммы этого ряда

$$S_1=x_0,\ S_2=x_1,\ \ldots,\ S_{n+1}=x_n.$$

Заметим, что $(n+1)$-я частичная сумма ряда (1.2.8) совпадает с n-ым членом итерационной последовательности (1.2.5), т. е.

$$S_{n+1}=x_n. \tag{1.2.9}$$

Сравним ряд (1.2.8) с рядом

$$|x_1-x_0|+q|x_1-x_0|+q^2|x_1-x_0|+\ldots \tag{1.2.10}$$