

ЗОЛОТОЙ
ФОНД
НАУКИ

Марио
ЛИВИО

БЫЛ ЛИ БОГ МАТЕМАТИКОМ?

ГАЛОПОМ
ПО БОЖЕСТВЕННОЙ
ВСЕЛЕННОЙ

{ с КАЛЬКУЛЯТОРОМ,
ШТАНГЕНЦИРКУЛЕМ }

и ТАБЛИЦАМИ

БРАДИСА

Золотой фонд науки

Марио Ливиио

**Был ли Бог математиком?
Галопом по божественной
Вселенной с калькулятором,
штангенциркулем и
таблицами Брадиса**

«АСТ»

2013

УДК 51(091)
ББК 22.1г

Ливио М.

Был ли Бог математиком? Галопом по божественной Вселенной с калькулятором, штангенциркулем и таблицами Брадиса / М. Ливио — «АСТ», 2013 — (Золотой фонд науки)

Альберт Эйнштейн писал: «Как так получилось, что математика, продукт человеческой мысли, независимый от опыта, так прекрасно соотносится с объектами физической реальности?» Наука предлагает абстрактную математическую модель, а спустя какое-то время (иногда десятилетия) выясняется, что эта модель существует в реальности! Так кто же придумал математику – мы сами или Вселенная? Может быть, математика – язык, на котором говорит с нами мироздание? Блестящий физик и остроумный писатель Марио Ливио рассказывает о математических идеях от Пифагора до наших дней и показывает, как абстрактные формулы и умозаключения помогли нам описать Вселенную и ее законы. Книга адресована всем любознательным читателям независимо от возраста и образования.

УДК 51(091)
ББК 22.1г

© Ливио М., 2013
© АСТ, 2013

Содержание

Предисловие	7
Глава 1	9
Изобретение или открытие?	14
Глава 2	19
Пифагор	20
Во глубину платоновской пещеры	32
Глава 3	41
Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю	44
Палимпсест Архимеда	52
Метод	55
Лучший ученик Архимеда	59
Звездный вестник	62
Конец ознакомительного фрагмента.	64

Марио Ливио

Был ли Бог математиком?

Галопом по божественной

Вселенной с калькулятором,

штангенциркулем и таблицами Брадиса

© MARIO LIVIO, 2013

© Бродоцкая А., перевод на русский язык, 2016

© ООО «Издательство АСТ», 2016

* * *

ПОНЯТНО ДАЖЕ ДИЛЕТАНТУ

Доктор Ливио сплетает воедино науку, историю, философию. Он вдохнул жизнь в образы самых известных мыслителей и математиков. Он объясняет сложнейшие теории так четко и лаконично, что даже самый далекий от науки человек с легкостью поймет их. Будь он учителем в моей школе или университете, я бы без сомнения смог понять и полюбить точные науки.

Х. Чайлдресс

НАУЧНЫЙ ДЕТЕКТИВ

После сказочной книги « π – число Бога. Золотое сечение – формула мироздания» Ливио берется за вопрос о «необоснованной эффективности» математики в объяснении мира. Смешав философию, математику и прочие науки, он создает интеллектуальное чтение, которое воспринимается почти как детектив. Мне понравился, в частности, раздел, посвященный идеям Архимеда и Галилея, и глава о логике, которая была сложной, но увлекательной.

Дж. Райдер

ИСТОРИЯ ИДЕЙ И СВЕЖИЕ ГИПОТЕЗЫ

Марио Ливио делает попытку исследовать отношения между математикой, Вселенной и человеческим разумом. Это такая амбициозная цель, что я был сначала настроен скептически: «Что можно рассказать об этом в популярной книге?» Однако в этой книге Ливио не только знакомит нас с историей идей, но и подкидывает свежие удивительные гипотезы. Настоятельно рекомендуется.

Л. Купер

ПОЧЕМУ ЭТОТ ВОПРОС НЕ ПРИШЕЛ МНЕ В ГОЛОВУ РАНЬШЕ?!

Все, кто интересуются математикой, философией или наукой, будут в восторге от этой книги.

Хотя я всегда знал, что все фундаментальные теории мироздания основаны на математике, мне почему-то никогда не приходило в голову поинтересоваться: почему математика столь всеведуща?

Ливио объясняет, почему этот вопрос даже важнее ответа. И это делает книгу совершенно уникальной. Это не столько история математики, сколько история гениальных прозрений.

М. Корс

ЭТА КНИГА БУДИТ МЫСЛЬ!

Хотя я далеко не математик, я нашел дискуссии, представленные в этой книге, о природе математики и о причинах ее успеха как «языка» науки очень увлекательными. Мыслители буквально ожили на этих страницах. Это одна из самых увлекательных и полезных книг среди всего, что я прочла.

Э. Проктор

Моей жене Софи

Предисловие

Когда изучаешь космологию, то есть историю Вселенной в целом, в твою жизнь прочно входят еженедельные письма и факсы от тех, кто жаждет познакомиться тебя со своей личной теорией устройства мироздания (кстати, это только мужчины, женщин среди них не бывает). Самой большой ошибкой в подобных случаях будет вежливо ответить, что хотелось бы узнать подробности. На это тут же получишь лавину сообщений. Как же обезопасить себя от атаки? Я на собственном опыте убедился, что есть один действенный тактический прием (можно, конечно, и вовсе не отвечать, но это ведь невежливо!): указать, что оценить значимость теории невозможно, пока она не переведена на точный язык математики, и это непреложная истина. Такой довод позволяет раз и навсегда остудить пыл большинства космологов-любителей. И в самом деле, без математики современные космологи не могут приблизиться к пониманию законов природы ни на шаг. Математика – прочный каркас, на котором зиждется любая теория Вселенной. Казалось бы, в этом нет ничего удивительного, – пока не вспомнишь, что природа самой математики нам пока не вполне ясна. Как сказал однажды английский философ сэра Майкл Даммит: «Две самые отвлеченные научные дисциплины – математика и философия – вызывают одинаковое недоумение: чем они, собственно, занимаются? Причем это недоумение вызвано не только незнанием: ответить на этот вопрос трудно даже специалистам в соответствующих областях».

В этой книге я робко попытаюсь прояснить некоторые вопросы, касающиеся сути математики, и, в частности, природу отношений между математикой и наблюдаемым миром. Разумеется, изложить на этих страницах полную историю математики в мои намерения не входило. Скорее я прослеживаю эволюцию определенных понятий, которые непосредственно влияли на понимание роли математики в исследованиях мироздания.

На идеи, о которых рассказано в этой книге, в самое разное время прямо или косвенно повлияли очень многие люди. Я бы хотел поблагодарить сэра Майкла Атья, Гию Двали, Фримана Дайсона, Гиллеля Гочмана, Дэвида Гросса, сэра Роджера Пенроуза, лорда Мартина Риса, Рамана Сандрама, Макса Тегмарка, Стивена Вайнберга и Стивена Вольфрама за ценнейшие замечания. Я в долгу перед Дороти Моргенштерн Томас за то, что она предоставила в мое распоряжение полный текст воспоминаний Оскара Моргенштерна о взаимодействии Курта Гёделя со Службой иммиграции и натурализации США. Уильям Кристенс-Барри, Кейт Еокс, Роджер Истон и в особенности Уилл Ноэл оказали мне любезность, поведав в подробностях о работе над расшифровкой «Палимпсеста Архимеда». Особая благодарность – Лауре Гарболино, которая снабдила меня важнейшими редкими материалами по истории математики.

Кроме того, я благодарю отделы особых коллекций Университета им. Джонса Хопкинса, Чикагского университета и Французской национальной библиотеки в Париже, где для меня находили редкие рукописи. Спасибо Стефано Касертано, который помог мне с переводами трудных латинских текстов, и Элизабет Фрэзер и Джилл Лагерстрем – за бесценные советы по лингвистике и библиографии, которые сопровождались неизменными улыбками.

Особая благодарность – Шэрон Тулан за профессиональную помощь в подготовке рукописи к печати, а также Энн Филд, Кристе Вилдт и Стэйси Бенн за подготовку ряда иллюстраций.

Любой писатель считал бы, что ему повезло, если бы к нему на протяжении всей работы над книгой относились с таким терпением и чуткостью, как моя жена Софи.

А напоследок я говорю спасибо моему агенту Сьюзен Рабинер: если бы она не подбадривала меня постоянно, этой книги не было бы. Еще я в неоплатном долгу перед моим редактором Бобом Бендером, который тщательно вычитал рукопись и высказал точные и глубокие

замечания, перед Джоанной Ли, которая оказывала мне неоценимую поддержку в течение издательского процесса, перед Лореттой Деннер и Эми Райан – за корректорскую правку, перед Викторией Мейер и Кэти Гринч – за продвижение и рекламу книги и перед всеми сотрудниками отделов производства и маркетинга в издательстве «Саймон и Шустер» – за их усердный труд.

Глава 1

Загадка

Несколько лет назад я выступал с докладом в Корнельском университете. На одном из слайдов в моей презентации значилось: «Бог – математик?» Едва этот слайд появился на экране, одна студентка в первом ряду ахнула и громко прошептала: «О Господи, надеюсь, нет!»

Я всего лишь задал риторический вопрос – и вовсе не пытался ни дать слушателям определение Бога, ни тонко поддеть тех, кто панически боится математики. Нет – я просто хотел загадать загадку, над которой мучительно ломали головы на протяжении веков самые независимые мыслители: указать на то, что математика, похоже, вездесуща и всемогуща. Подобные качества принято приписывать лишь божествам. Как сказал когда-то английский физик Джеймс Джинс (1877–1946): «Вселенная устроена так, словно ее конструировал чистый математик» (Jeans 1930). Такое чувство, что математика слишком уж хорошо описывает и объясняет не только Вселенную в целом, но даже некоторые довольно хаотические начинания, предпринимаемые людьми.

Всякий раз, когда физики пытаются сформулировать теории об устройстве Вселенной, биржевые аналитики чешут в затылке, чтобы предсказать следующий обвал на фондовой бирже, нейрофизиологи строят модели функционирования мозга, а статистики на службе у военной разведки работают над оптимизацией распределения ресурсов, все они пользуются математикой. Более того, хотя они и пользуются конкретными методами, разработанными в различных областях математики, но при этом сверяются с одной и той же «математикой» в общем, понятном для всех смысле слова.

Что же наделяет математику таким невероятным могуществом? Или, как спросил однажды Эйнштейн: «Как так получилось, что математика, продукт человеческой мысли, *независимый от опыта* (курсив мой. – М. Л.), так прекрасно соотносится с объектами физической реальности?» (Einstein 1934).

Это ощущение полной растерянности нам не в новинку. Некоторые древнегреческие философы, в частности Платон и Аристотель, уже восхищались тем, что математика, похоже, способна формировать и направлять Вселенную, оставаясь, по всей видимости, вне пределов досягаемости людей, которые не могут ни менять ее, ни повелевать ею, ни влиять на нее. Английский философ и политолог Томас Гоббс (1588–1679) тоже не смог сдержать восхищения. В своем «Левиафане» Гоббс рисует величественную панораму своих представлений об основах общества и правительства, приводя геометрию в качестве образца рациональной аргументации (Hobbes 1651).

Так как мы видим, что истина состоит в правильной расстановке имен в наших утверждениях, то человек, который ищет точной истины, должен помнить, что обозначает каждое употребляемое им имя, и соответственно этому поместить его; в противном случае он попадет в ловушку слов, как птица в силос, и, чем больше усилий употребит, чтобы вырваться, тем больше запутается. Вот почему в геометрии (единственной науке, которую до сих пор Богу угодно было пожаловать человеческому роду) люди начинают с установления значений своих слов, которые они называют определениями (*пер. А. Гутермана*).

Целые тысячелетия глубочайших математических исследований и философских размышлений так и не пролили света на тайну могущества математики. Более того, в некотором смысле завеса тайны стала еще плотнее. Знаменитый оксфордский математик сэр Род-

жер Пенроуз, к примеру, считает, что вместо одной загадки перед нами уже три. Пенроуз выделяет три разных «мира» – *мир сознательного восприятия, физический мир и платоновский мир математических форм*¹. Первый мир – вместилище всех ментальных образов: как мы воспринимаем лица детей, как любуемся головокружительным закатом, как отзываемся на страшные военные фотографии. А еще именно в этом мире обитают любовь, ревность, предубеждения, а также наше восприятие музыки, аппетитных ароматов и страха. Второй мир – тот самый, который мы привыкли называть физической реальностью. В этом мире обитают живые цветы, таблетки аспирина, белые облака и сверхзвуковые самолеты, а еще – галактики, планеты, атомы, обезьяньи сердца и человечьи мозги. Платоновский мир математических форм, который для Пенроуза не менее реален, чем физический и ментальный, – родина математики. Именно там обнаруживаешь натуральные числа 1, 2, 3, 4 и так далее, все формы и теоремы евклидовой геометрии, законы движения Ньютона, теорию струн, теорию катастроф и математические модели поведения фондового рынка. И тут-то, как замечает Пенроуз, и таятся три загадки. Во-первых, мир физической реальности подчиняется законам, которые на самом деле пребывают в мире математических форм. Эта загадка ставила в тупик самого Эйнштейна. В таком же недоумении по этому поводу пребывал физик Юджин Вигнер (1905–1995), нобелевский лауреат (Wigner 1960)².

Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу и надеяться, что и в своих будущих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им. Мы думаем, что сфера его применимости (хорошо это или плохо) будет непрерывно возрастать, принося нам не только радость, но и новые головоломные проблемы. (*Здесь и далее пер. Ю. Данилова.*)

Во-вторых, само воспринимающее сознание, обиталище сознательного восприятия, неведомо как зарождается именно в физическом мире. Но как именно *материя* порождает *сознание* – причем порождает в буквальном смысле слова? Сумеет ли мы когда-нибудь сформулировать теорию работы сознания, столь же цельную и убедительную, сколь, к примеру, наша нынешняя теория электромагнетизма? Тут цикл чудесным образом замыкается. Воспринимающее сознание благодаря какому-то загадочному механизму обладает доступом к математическому миру, поскольку именно оно то ли открывает, то ли создает и формулирует целую сокровищницу абстрактных математических форм и понятий.

Пенроуз не предлагает ответов ни на одну из этих трех загадок. Он просто делает лаконичный вывод: «Миров, несомненно, не три, а только один, о подлинной природе которого мы на сегодня не имеем ни малейшего представления». В этом признании гораздо больше смирения, чем в ответе учителя из пьесы английского драматурга Алана Беннетта «Сорок лет службы».

Фостер: Сэр, мне по-прежнему не вполне понятна идея Святой Троицы.

Учитель: Все очень просто – один есть три, три есть один. Если у вас по этому поводу есть сомнения, спросите учителя математики.

На самом деле загадка еще запутаннее. У того, что математика так хорошо описывает мир вокруг нас (Вигнер называл это «непостижимой эффективностью математики»), есть две стороны, одна поразительнее другой. Одну из них можно было бы назвать актив-

¹ Об этих трех мирах Пенроуз замечательно пишет в книгах «Новый ум короля» и «Путь к реальности».

² К этой статье мы еще не раз вернемся на страницах нашей книги.

ной. Когда физики блуждают по лабиринтам природы, то освещают себе путь математикой: инструменты, которыми они пользуются и которые постоянно разрабатывают, модели, которые они конструируют, и объяснения, которые они предлагают, по сути своей математические. На первый взгляд это само по себе чудо. Ньютон наблюдал падение яблока, фазы Луны и приливы по берегам морей (не уверен, что он видел их воочию), а не математические формулы. Однако он каким-то образом сумел вывести из этих природных явлений ясные, лаконичные и неимоверно точные математические законы природы. Подобным же образом шотландский физик Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879), когда он расширил рамки классической физики и включил в нее все электрические и магнитные явления, известные в шестидесятые годы XIX века, сделал это при помощи всего четырех математических формул. Задумайтесь об этом. Объяснение результатов целого ряда экспериментов в области света и электромагнетизма, на описание которых потребовались целые тома, свелось к четырем сухим формулам. Общая теория относительности Эйнштейна – случай еще более поразительный: это идеальный пример необычайно точной и самосогласованной математической теории, которая описывает самые основы мироздания – структуру пространства-времени.

Однако у загадочной эффективности математики есть и «пассивная» сторона, столь неожиданная, что напрочь затмевает «активную». Понятия и отношения, которые математики изучают ради чистой науки, даже и не думая об их практическом применении, спустя десятки, а иногда и сотни лет неожиданно-негаданно оказываются решениями задач, которые коренятся в физической реальности! Как такое может быть? Возьмем, к примеру, довольно забавный случай с чудаковатым британским математиком Годфри Гарольдом Харди (1877–1947). Харди так гордился, что в его трудах не содержится ничего, кроме чистой математики, что подчеркивал в своей знаменитой книге «Апология математика», опубликованной в 1940 году: «Я никогда не делал ничего “полезного”. Ни одно мое открытие не способствовало ни прямо, ни косвенно увеличению или уменьшению добра или зла и не оказало ни малейшего влияния на благоустроенность мира (*здесь и далее пер. Ю. Данилова*)» (Hardy 1940). Так вот, представляете, он ошибся! Один из его трудов получил второе рождение под названием «Закон Харди-Вайнберга» (в честь Харди и немецкого врача Вильгельма Вайнберга (1862–1937)) – это основополагающий принцип, на который опираются генетики при изучении эволюции популяций. Говоря простыми словами, закон Харди-Вайнберга гласит, что если спаривание в большой популяции происходит совершенно случайно (и нет ни миграции, ни мутаций, ни селекции), то генетический состав от поколения к поколению не меняется³. Даже отвлеченный на первый взгляд труд Харди *по теории чисел* – исследование свойств натуральных чисел – нашел неожиданное практическое применение. В 1973 году британский математик Клиффорд Кокс применил теорию чисел, чтобы совершить прорыв в криптографии – науке о разработке шифров, и изобрел уникальный криптографический алгоритм⁴. Алгоритм Кокса отправил на свалку истории другое утверждение Харди. В той же «Апологии математика» Харди заявил: «Никому еще не удалось обнаружить ни одну военную или имеющую отношение к войне, задачу, которой служила бы теория чисел». Очевидно, что он в очередной раз впал в заблуждение. Шифры играют определяющую роль в военном деле, без них невозможно налаживать связь. Так что даже Харди, один из самых ярких критиков прикладной математики, оказался против собственной воли (будь он жив, он бы наверняка визжал и отбивался) вовлечен в число создателей полезных математических теорий.

Но все это лишь верхушка айсберга. Кеплер и Ньютон обнаружили, что планеты нашей Солнечной системы описывают орбиты в форме эллипсов – тех самых кривых, которые на

³ О законе Харди-Вайнберга в контексте см., например, Hedrick 2004.

⁴ Этот алгоритм тогда был засекречен, а впоследствии получил название RSA в честь Р. Ривеста, А. Шамира и Л. Адлемана из Массачусетского технологического института, которые независимо придумали его несколько лет спустя. См. Rivest, Shamir, and Adleman 1978.

2000 лет раньше изучал древнегреческий математик Менехм (ок. 350 г. до н. э.). Геометрии нового типа, которые описал Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1866) в своей классической лекции, прочитанной в 1854 году, как выяснилось, сослужили важнейшую службу Эйнштейну – именно они позволили описать ткань мироздания. Математический «язык» под названием «теория групп», разработанный юным гением Эваристом Галуа (1811–1832) исключительно ради того, чтобы определять, имеются ли у тех или иных алгебраических уравнений корни среди целых чисел, стал сегодня языком физиков, инженеров, лингвистов и даже антропологов, позволяющим описать все симметрии на свете⁵. Более того, концепция закономерностей математической симметрии в известном смысле перевернула с ног на голову весь научный метод. На протяжении столетий путь к пониманию устройства мироздания начинался со сбора экспериментальных или наблюдательных фактов, после чего ученые методом проб и ошибок пытались сформулировать общие законы природы. Работа должна была начинаться с локальных наблюдений, после чего мозаику приходилось собирать по кусочкам. Когда в XX веке стало понятно, что структуру субатомного мира определяют четкие математические закономерности, современные физики стали поступать диаметрально противоположным образом. Они сначала привлекают принципы математической симметрии и настаивают, что законы природы и, разумеется, кирпичики, из которых состоит вещество, должны подчиняться определенным закономерностям, и выводят из этих предпосылок общие законы. Но откуда природа знает, что ей положено следовать абстрактным математическим симметриям?

В 1975 году Митч Фейгенаbaum, который тогда был молодым специалистом по математической физике в Национальной лаборатории в Лос-Аламосе, играл со своим карманным калькулятором HP-65. Он изучал поведение одной простой функции. И обнаружил, что последовательность чисел, получавшаяся в результате вычислений, устремляется все ближе и ближе к определенному числу – 4,669...⁶. Когда Митч изучил некоторые другие уравнения, то, к своему изумлению, обнаружил, что и там появляется то же самое загадочное число. Вскоре Фейгенбаум сделал вывод, что открыл некую универсальную закономерность, которая каким-то образом знаменует переход от порядка к хаосу, хотя объяснения этому найти не мог. Неудивительно, что поначалу физики отнеслись к этому весьма скептически. И в самом деле, с какой стати одно и то же число должно характеризовать поведение разных на первый взгляд систем? Первая статья Фейгенбаума проходила рецензирование в течение полугода, после чего ее отклонили. Однако довольно скоро эксперименты показали, что если нагревать жидкий гелий снизу, он ведет себя именно так, как предсказывает универсальное решение Фейгенбаума. Как выяснилось, так себя ведут и многие другие системы. Удивительное число Фейгенбаума возникало и при переходе от упорядоченного течения жидкости или газа к турбулентности и даже в поведении воды, капающей из крана. Перечень подобных случаев, когда математики «предвосхищали» потребности различных дисциплин на несколько поколений вперед, все пополняется и пополняется. Среди самых поразительных примеров загадочного и неожиданного взаимодействия между математикой и реальным (физическим) миром – история создания математической теории узлов. Математический узел похож на обычный узел на тонком шнуре, концы которого намертво сращены. То есть математический узел – это замкнутая кривая без свободных концов. Как ни странно, первоначальный толчок развитию математической теории узлов дала ошибочная модель атома, разработанная в XIX веке. Когда эту модель отвергли – спустя всего 20 лет после создания, – теория узлов стала разливаться дальше как сравнительно малоизвестная отрасль чистой математики. Неве-ро-

⁵ Научно-популярные книги о симметрии и теории групп и о хитросплетениях их истории – «The Equation That Couldn't Be Solved» (Livio 2005), Stewart 2007, Ronan 2006 и Du Sautoy 2008.

⁶ Чудесный популярный рассказ о возникновении теории хаоса см. в Gleick 1987.

ятно, но факт: в наши дни это абстрактное начинание неожиданно нашло широчайшее применение в самых разных областях исследований – от молекулярной структуры ДНК до теории струн, попытки объединить субатомный мир с гравитацией. К этой восхитительной истории я еще вернусь в главе 8, поскольку ее циклическая структура, пожалуй, лучше всего показывает, как из попыток объяснить физическую реальность возникают отрасли математики, которые затем уходят в область отвлеченной математики, однако впоследствии неожиданно возвращаются в реальность.

Изобретение или открытие?

Даже такой сжатый рассказ уже содержит в себе массу убедительных доводов в пользу того, что Вселенная либо подчиняется математике, либо, как минимум, поддается анализу посредством математики. Как покажет эта книга, практически все, а может быть, и абсолютно все человеческие начинания, похоже, основаны на каком-то скрытом математическом механизме, даже там, где этого совсем не ждешь. Возьмем хотя бы пример из мира финансов – модель ценообразования опционов Блэка-Шоулза (Black and Scholes 1973). Модель Блэка-Шоулза стяжала своим разработчикам Нобелевскую премию по экономике (правда, только двоим из трех – Майрону Шоулзу и Роберту Кархерту Мертону, так как Фишер Блэк скончался до присуждения премии). Главная ее формула позволяет понять, как устроено ценообразование опционов (это такие финансовые инструменты, которые позволяют игрокам на бирже покупать или продавать ценные бумаги в какой-то момент в будущем по заранее согласованной цене). Однако тут-то и начались неожиданности. Эта модель опирается на явление, которое физики изучают уже десятки лет – броуновское движение, оживленное мельтешение крошечных частичек вроде пылцы, если размешать их с водой, или частичек дыма в воздухе. А потом, будто этого оказалось мало, выяснилось, что то же самое уравнение применимо и к движению сотен тысяч звезд в звездных скоплениях. Выражаясь словами Алисы, все страньше и страньше, не так ли? Конечно, космос есть космос, но ведь бизнес и финансы – это определенно плод человеческого разума!

Или вспомним, с какими трудностями часто сталкиваются производители электронных комплектующих и разработчики компьютеров. В печатных платах нужно проделывать лазерным сверлом десятки тысяч отверстий. Чтобы снизить затраты, разработчики компьютеров стараются, чтобы сверло не вело себя словно «заблудившийся турист». Задача состоит в том, чтобы проложить кратчайший маршрут между отверстиями, при котором сверло проходило бы точку, где расположено каждое отверстие, ровно один раз. Как выяснилось, математики уже успели позаниматься этой задачей еще в 20-е годы XX века, и тогда она получила название «Задача коммивояжера». Суть ее такова: коммивояжеру или политику в рамках предвыборной компании нужно объехать определенные города, причем стоимость дороги между каждыми двумя городами известна заранее. Путешественник должен проложить самый выгодный маршрут, чтобы объехать все города и затем вернуться в исходную точку. В 1954 году было получено решение задачи коммивояжера для 49 городов в США. В 2004 году – для 24 978 населенных пунктов в Швеции⁷. Иными словами, электронная промышленность, компании, которые прокладывают маршруты для развозки посылок и покупок, и даже японские производители игровых автоматов под названием пинбол – это что-то вроде пинбола, – которым приходится вбивать тысячи гвоздиков, должны полагаться на математику при выполнении простейших, казалось бы, действий – сверлении отверстий, составлении расписания, разработке компьютерного «железа».

Математика проникла даже в те сферы, которые по традиции никак не ассоциируются с точными науками. Например, существует «Журнал математической социологии» (*Journal of Mathematical Sociology*) (в 2006 году вышел его тридцатый выпуск), тематика которого – статьи о математическом понимании сложных общественных структур, организаций и неформальных объединений. В журнале публикуются статьи по самым разным вопросам от математических моделей прогнозов общественного мнения до предсказания взаимодействий внутри тех или иных социальных групп.

⁷ Превосходное, хотя и сугубо научное описание этой задачи и ее решений можно найти в книге Applegate et al. 2007.

Если двинуться в обратном направлении, от математики в сторону гуманитарных наук, мы попадем в область вычислительной лингвистики, которая изначально привлекала исключительно специалистов по информатике, а сейчас превратилась в пространство междисциплинарных исследований, где совместно трудятся лингвисты, психологи-когнитивисты, логики и разработчики искусственного интеллекта, исследующие тонкости естественного развития языков.

Неужели это какой-то хитроумный розыгрыш – ведь все попытки человека что-то понять, в чем-то разобраться приводят в конце концов к открытию все новых отраслей математики, по законам которой, как видно, создана и сама Вселенная, и мы, ее сложные творения? Неужели математика, как любят говорить педагоги, – спрятанный учебник, тот, по которому учится преподаватель, сообщая ученикам неполную версию, чтобы казаться умнее? Или, если обратиться к библейской метафоре, математика – это и есть плод древа познания?

Как я уже отмечал в начале этой главы, непостижимая эффективность математики задает множество интереснейших загадок. Можно ли считать, что математика существует независимо от человеческого разума? Иначе говоря, можно ли считать, что мы просто *открываем* математические истины, как астрономы открывают неизвестные ранее галактики? Или математика – всего лишь *изобретение* человека? Если математика и правда существует в какой-то абстрактной стране чудес, как этот волшебный мир соотносится с физической реальностью? Каким образом человеческий мозг со всеми его ограничениями, о которых нам прекрасно известно, находит путь в этот незыблемый мир вне времени и пространства? С другой стороны, если математика не более чем человеческое изобретение и вне нашего разума не существует, как объяснить тот факт, что изобретение огромного количества математических истин по какому-то волшебству надолго опередило вопросы об устройстве Вселенной и человеческой жизни, которые возникли лишь много веков спустя? Ответить на эти вопросы непросто. Не раз и не два на страницах этой книги вы увидите, насколько разные ответы дают на них даже современные математики, психологи-когнитивисты и философы. В 1989 году французский математик Ален Конн, удостоенный двух самых престижных премий по математике – Филдсовской медали (1982) и премии Крафорда (2001), высказался вполне ясно и недвусмысленно (Changeux and Connes 1995).

Возьмем, к примеру, простые числа (то есть те, которые делятся только сами на себя и на единицу. – *М. Л.*), – насколько я могу судить, они составляют куда более стабильную реальность, чем та материальная реальность, которая нас окружает. Математика, который трудится над своей задачей, можно уподобить естествоиспытателю, который изучает неведомый мир. Основные факты обычно выводятся из опыта. Например, если проделывать несложные вычисления, становится понятно, что последовательность простых чисел продолжается бесконечно. Значит, задача математика – доказать, что существует бесконечно много простых чисел. Это, разумеется, очень старый результат, мы обязаны им еще Евклиду. Среди самых интересных следствий из этого доказательства – если когда-нибудь кто-нибудь заявит, будто нашел самое большое простое число, будет легко показать, что он заблуждается. Это справедливо для любого доказательства. То есть мы сталкиваемся с реальностью, которая в точности так же неопровержима, как и реальность физическая.

Мартин Гарднер, знаменитый писатель, автор множества книг и статей о развлекательной математике, тоже придерживается того мнения, что математика – это *открытие*. Он ничуть не сомневается, что числа и математика существуют сами по себе и неважно, знают ли о них люди. Как-то раз он остроумно подметил: «Если два динозавра повстречали

на полянке двух других динозавров, всего их было четыре, даже если поблизости не было людей и некому было это пронаблюдать, а сами зверюги по глупости об этом не догадывались» (Gardner 2003). Как подчеркивал Конн, сторонники точки зрения «математика-открытие» (что, как мы вскоре убедимся, соответствует взглядам Платона) указывают, что как только удастся усвоить какое-то одно математическое понятие, скажем, понятие натуральных чисел $1, 2, 3, 4, \dots$, как мы натываемся на неопровержимые факты вроде $3^2 + 4^2 = 5^2$, и при этом не играет никакой роли, что мы думаем об этих соотношениях. Это, по крайней мере, оставляет впечатление, что мы сталкиваемся с некоей существующей реальностью.

Но с этим согласны не все. Когда английский математик сэра Майкл Атья, получивший Филдсовскую медаль в 1966 году и Абелевскую премию в 2004 году, писал рецензию на книгу, в которой Конн излагал свои идеи, то заметил следующее (Atiyah 1995).

Любой математик не может не сочувствовать Конну. Все мы интуитивно чувствуем, что целые числа или, скажем, окружности и в самом деле существуют в некоем абстрактном смысле и платоновское мировоззрение (о нем мы подробно поговорим в главе 2. – М. Л.) необычайно соблазнительно. Однако как его отстоять? Трудно представить себе, чтобы во Вселенной возникла и развилась геометрия, будь Вселенная одномерной или даже дискретной. Может показаться, что с целыми числами мы чувствуем себя увереннее и что счет – это и в самом деле нечто существующее изначально. Однако представим себе, что разумом наделено не человечество, а какая-нибудь огромная одинокая медуза в глубинах Тихого океана. Все ее сенсорные данные определялись бы движением, температурой и давлением. Поскольку все это – чистейший континуум, в такой обстановке не может появиться ничего дискретного, и медузе нечего было бы считать.

Поэтому Атья считает, что «человек *создал* (курсив мой. – М. Л.) математику посредством идеализации и абстрагирования элементов физического мира». Той же точки зрения придерживаются и лингвист Джордж Лакофф и психолог Рафаэль Нуньес. В своей книге «Откуда взялась математика» («*Where Mathematics Comes From*») они приходят к такому выводу: «Математика – естественная составляющая человеческого бытия. Она возникает из нашего тела, нашего мозга, нашего повседневного опыта взаимодействия с миром» (Lakoff and Núñez 2000).

Точка зрения Атья, Лакоффа и Нуньеса затрагивает еще один интересный вопрос. Если математика – это целиком и полностью человеческое изобретение, универсальна ли она? Иначе говоря, если существуют внеземные цивилизации, будет ли их математика такой же, как наша? Карл Саган (1934–1996) полагал, что ответ на последний вопрос утвердительный. В своей книге «Космос» Саган, в частности, размышлял о том, какого рода сигналы передавала бы в космос разумная цивилизация, и писал: «Крайне маловероятно, чтобы какой-нибудь естественный физический процесс генерировал радиосообщение, содержащее только простые числа. Получив подобное сообщение, мы можем заключить, что где-то есть цивилизация, которая любит простые числа (*пер. А. Сергеева*)». Но можно ли утверждать это с уверенностью? Недавно физик и математик Стивен Вольфрам в своей книге «Наука нового типа» («*A New Kind of Science*») утверждал, что так называемая «наша математика», вероятно, соответствует лишь одному из богатейшего ассортимента «вкусов» математики (Wolfram 2002). Например, вместо того, чтобы описывать природу при помощи законов, выраженных в виде математических уравнений, мы могли бы пользоваться законами иного типа, воплощенными в виде простых компьютерных программ. Более того, некоторые космологи в последнее время стали обсуждать гипотезу, согласно которой наша Вселенная – всего лишь составная часть *множественной Вселенной* или *мультиверса*, огромного ансам-

бля вселенных. Если множественная Вселенная и вправду существует, вправе ли мы ожидать, что в других вселенных будет такая же математика?

Специалисты по молекулярной биологии и психологии познания предлагают совершенно иную точку зрения, основанную на изучении свойств и способностей мозга. По представлениям некоторых ученых, математика – это нечто вроде языка. Иными словами, согласно «когнитивному сценарию», после того как человечество сотни тысяч лет таращилось на свои две руки, две ноги и два глаза, появилось абстрактное определение числа 2 – примерно так же, как возникло слово «птица», обозначающее множество двукрылых теплокровных пернатых существ, умеющих летать. По словам французского нейрофизиолога Жан-Пьера Шанжэ: «С моей точки зрения, аксиоматический метод (применяющийся, например, в евклидовой геометрии. – М. Л.) – выражение способностей головного мозга, связанное с его использованием. Ведь основная характеристика языка – это именно его генеративный характер (Changeux and Connes 1995)». Однако, если математика – тот же язык, как объяснить, что, хотя дети легко учатся родному языку, математика дается многим с таким трудом? Марджори Флеминг (1803–1811), шотландская девочка-вундеркинд, не дожившая до 9 лет, оставила дневник – более девяти тысяч слов прозы и около пятисот стихотворных строк – где, помимо всего прочего, очаровательно описывает, с какими сложностями сталкиваются дети при изучении математики. В одном месте Марджори жалуется: «А теперь я хочу рассказать тебе, дорогой дневник, как страшно и ужасно мучает меня таблица умножения, ты себе и представить не можешь! Самое кошмарное – это восемь на восемь и семь на семь, это противно самой природе!»

Сложные вопросы, о которых я здесь рассказал, можно в некоторой степени переформулировать: есть ли какое-то фундаментальное различие между математикой и другими выражениями человеческого разума, например изобразительным искусством и музыкой? Если нет, почему математика обладает столь впечатляющей последовательностью, всеохватностью и самодостаточностью, в отличие от всех остальных творений человечества? Ведь, к примеру, евклидова геометрия в наши дни (когда она нашла практическое применение) так же точна, что и в 300 году до нашей эры; она отражает «истины», которые нам навязаны. А при этом мы, напротив, не обязаны ни слушать ту же самую музыку, которую слушали древние греки, ни придерживаться наивной аристотелевой модели Вселенной. Лишь очень немногие научные дисциплины в наши дни находят применение идеям, которым уже три тысячи лет от роду. С другой стороны, последние достижения математики могут относиться к теоремам, опубликованным в прошлом году или на прошлой неделе, однако при этом, не исключено, что они опираются на формулу площади сферической поверхности, которую вывел Архимед около 250 года до нашей эры! Узловая модель атома прожила всего лет двадцать, поскольку были сделаны новые открытия, показавшие, что составные части этой теории ошибочны. Так и происходит научный прогресс. Ньютон благодарил (или не благодарил, см. главу 4!) гигантов, на плечах которых стоял. Надо было ему еще и извиниться перед гигантами, чьи труды из-за него канули в Лету.

В математике все идет совсем иначе. Хотя математический инструментарий, необходимый для доказательства определенных результатов, иногда меняют, сами математические результаты не меняются никогда. Более того, как выразился математик и писатель Иэн Стюарт: «В математике есть особый термин для полученных когда-то результатов, которые затем были изменены: они называются *ошибками*» (Stewart 2004). И эти ошибки называются ошибками не потому, что были совершены какие-то новые открытия, как в других науках, а потому, что результаты более тщательно и дотошно сверили со все теми же старыми математическими истинами. Но делает ли это математику родным языком Бога?

Если вам кажется, что не так уж важно знать, изобрели мы математику или открыли, задумайтесь, как сильно оказывается нагружена разница между словами «изобрели» и

«открыли», если задать вопрос иначе: а что же Бог – изобрели мы его или открыли? Или еще провокационнее: Бог ли создал людей по Своему образу и подобию или люди изобрели Бога по своему образу и подобию?

Многие из этих интереснейших вопросов (и довольно много дополнительных), а также весьма неоднозначные ответы на них, я и попытаюсь рассмотреть в этой книге. По ходу дела я предложу обзор идей, которые можно почерпнуть в трудах величайших математиков, физиков, философов, специалистов по когнитивной психологии и лингвистов прошлого и настоящего. Кроме того, я приведу мнения, оговорки и размышления многих современных мыслителей. Это увлекательное путешествие мы начнем с революционных прорывов, которые совершили философы далекой древности.

Глава 2

Мистики: нумеролог и философ

Жажда понять устройство мироздания двигала человечеством с самого начала времен. Попытки наших собратьев добраться до дна с вопросом «Что все это значит?» выходили далеко за рамки необходимого для простого выживания, улучшения экономической ситуации или качества жизни. Из этого не следует, что все и всегда активно участвовали в поисках каких-то закономерностей в природе или в метафизике. Тот, кто тратит все силы, чтобы свести концы с концами, редко может позволить себе роскошь размышлять о смысле жизни. А в череде тех, кто искал закономерности в головокружительно сложной на первый взгляд структуре Вселенной, выделяется несколько гигантов – на голову выше прочих.

Для многих из нас символом начала современной эпохи в философии науки стало имя французского математика, философа и естествоиспытателя Рене Декарта (1596–1650). Декарт был среди тех, кто добился перехода от описания мира природы с точки зрения качеств, воспринимаемых нашими органами чувств, к объяснению природных явлений при помощи численных величин, полученных на основе точных математических методов (о вкладе Декарта в научный прогресс мы поговорим подробнее в главе 4). Вместо ощущений, запахов и цветов, которые можно было охарактеризовать лишь расплывчато, Декарт потребовал научных объяснений, которые доходили бы до самого фундаментального микроуровня и были бы сформулированы на языке математики (Descartes 1644).

...Мне неизвестна иная материя телесных вещей, как только... та, которую геометры называют *величиной* и принимают за объект своих доказательств... И так как этим путем... могут быть объяснены все явления природы, то, мне думается, не следует в физике принимать других начал, кроме вышеизложенных, да и нет оснований желать их (*пер. С. Шейнман-Топштейн, Н. Сретенского*).

Интересно, что Декарт исключил из своей общей научной картины мира царства «мышления и разума»: он считал, что они независимы от материального мира, который можно описать математически. Хотя не приходится сомневаться, что Декарт входит в число самых влиятельных мыслителей последних четырех столетий, не он первый отвел центральное место математике. Хотите верьте, хотите нет, но обобщенные представления о космосе, пронизанном и управляемым математикой, заходившие временами даже дальше декартовских, высказывались, пусть и с сильным уклоном в мистицизм, за две с лишним тысячи лет до Декарта. Легенды гласят, что не кто иной, как загадочный Пифагор, считал, что душа человека, занимающегося чистой математикой, «напоена музыкой».

Пифагор

Пифагор (ок. 572–497 гг. до н. э.) был, вероятно, первым человеком, которому удалось одновременно быть и авторитетным естествоиспытателем, и харизматическим главой философской школы, и ученым, и религиозным мыслителем. В сущности, считается, что именно он и ввел понятия «философии» – любви к мудрости – и «математики» – совокупности научных дисциплин, подлежащих изучению (Iamblichus ca. 300 ADa, см. Guthrie 1987). Хотя до нас не дошло ни одного подлинного сочинения Пифагора (если они вообще записывались, поскольку его учение распространялось в основном устно), в нашем распоряжении есть три подробные, пусть и не вполне достоверные биографии Пифагора, созданные в III веке (Laertius ca. 250 AD; Porphyry ca. 270 AD; Iamblichus ca. 300 ADa, b.). Четвертая, анонимная, пересказана в трудах византийского патриарха и философа Фотия (ок. 820–891 гг.). При изучении наследия Пифагора основная трудность заключается в том, что его последователи и ученики, пифагорейцы, неизменно приписывали ему все свои идеи. В результате даже Аристотелю (384–322 гг. до н. э.) было сложно определить, какие принципы пифагорейской философии можно без опасений приписывать самому Пифагору, поэтому он обычно ссылается на «пифагорейцев» или «так называемых пифагорейцев» (Aristotle ca. 350 гг. до н. э.; см. Burkert 1972). Тем не менее, если учесть, как часто Пифагор упоминается в позднейшей традиции, в целом принято считать, что по крайней мере часть пифагорейских теорий, оказавших сильное влияние на Платона и даже на Коперника, восходят к самому Пифагору.

Нет практически никаких сомнений, что Пифагор родился в начале VI века до н. э. на острове Самос, неподалеку от побережья современной Турции. Вероятно, в юности он много путешествовал, особенно в Египет и, возможно, в Вавилон, где и получил первоначальное математическое образование. Затем он эмигрировал в маленькую греческую колонию Кротон у южной оконечности Италии, где вокруг него быстро собралась группа энтузиастов – учеников и последователей.

Греческий историк Геродот (ок. 485–425 гг. до н. э.) назвал Пифагора «величайшим эллинским мудрецом» (Herodotus 440 гг. до н. э.), а поэт и философ-досократик Эмпедокл (ок. 492–432 гг. до н. э.) восхищенно добавил (Porphyry ca. 270 AD)/

Жил среди них некий муж, умудренный безмерным познанием,
Подлинно мыслей высоких владевший сокровищем ценным,
В разных искусствах премудрых свой ум глубоко изоштивший.
Ибо как скоро всю силу ума напрягал он к Познанию,
То без труда созерцал любое, что есть и что было,
За десять или за двадцать провидя людских поколений.

(Пер. Г. Якубаниса в обр. М. Гаспарова.)

Однако не на всех учение Пифагора производило такое сильное впечатление. Философ Гераклит Эфесский (ок. 535–475 гг. до н. э.) в комментариях, в которых явственно прослеживается личное соперничество, признает широкие познания Пифагора, однако тут же пренебрежительно добавляет: «Многознание не научает быть умным, иначе бы оно научило Гесиода (греческого поэта, жившего около 700 г. до н. э. – М. Л.) и Пифагора» (пер. М. Дынника).

Пифагор и ранние пифагорейцы не были ни математиками, ни учеными в строгом смысле слова. Скорее, в основе их учения лежит метафизическая философия значения чисел. В глазах пифагорейцев числа были и актуальными сущностями, практически живыми, и универсальными принципами, которые охватывали все, от небес до человеческой этики. Иначе говоря, числа рассматривались с двух разных, хотя и взаимосвязанных сторон. С одной стороны, они существовали вполне осязаемо, физически, с другой – это были абстрактные

рецепты, на основании которых строилось все остальное. Скажем, *монада* (число 1) понималась и как генератор всех прочих чисел, сущность, столь же реальная, сколь и вода, огонь и воздух, играющая свою роль в структуре физического мира, и как идея, метафизическая единица, стоящая у источника всего творения⁸. О двойном значении, которое придавали числам пифагорейцы, писал (на прелестном языке XVII века) и английский историк философии Томас Стэнли (1625–1678).

Число двояко – его можно понимать либо как нечто умственное (то есть нематериальное), либо как нечто научное. Умственное число есть та вечная сущность числа, которую пифагорейцы в своих рассуждениях о богах называли тем самым *первоначалом, на котором и зиждется и земля, и небо, и заключенная меж ними природа...* Именно его называют *первоначалом, источником и корнем всего сущего...* Научное же число Пифагор определяет как *расширение и претворение в действие продуктивных первопричин, заключенных в монаде или в скоплении монад* (Stanley 1687).

Итак, числа – не просто инструменты для обозначения количества или объема. Нет, их надо было открыть – и именно они служат основными движущими силами в природе. Все во Вселенной, от материальных объектов вроде Земли до абстрактных понятий вроде справедливости, – это числа и только числа.

В принципе, числа вполне могут заинтересовать и увлечь кого угодно, в этом нет ничего удивительного⁹. Ведь даже самые заурядные числа, с которыми мы сталкиваемся изо дня в день, и те обладают занятными свойствами. Возьмем, к примеру, число дней в году – 365. Нетрудно убедиться, что 365 – это сумма трех последовательных квадратов: $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2$. Мало того, это число также равно сумме двух следующих квадратов ($365 = 13^2 + 14^2$). Или рассмотрим число дней в лунном месяце – 28. Это число – сумма всех своих делителей (чисел, на которые его можно делить без остатка): $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Числа, обладающие этим особым свойством, называются совершенными числами (первые четыре совершенные числа – 6, 28, 496, 8218). Отметим также, что 28 – это сумма кубов первых двух нечетных чисел: $28 = 1^3 + 3^3$. Свои странности есть даже у такого широкоупотребительного в нашей десятичной системе числа, как 100: $100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.

В общем, ясно, что в числах много интересного. И все же вполне можно задаться вопросом, каков источник пифагорейского учения о числах. Откуда появилась идея, что не просто всему на свете можно приписать число – что все на свете *суть* числа? Поскольку, либо пифагорейцы ничего не записывали, либо все их сочинения были уничтожены, ответить на этот вопрос нелегко. Мы имеем возможность составить впечатление о пифагорейской логике на основании небольшого числа доплатоновских фрагментов и гораздо более поздних и менее надежных суждений, принадлежащих в основном философам-последователям Платона и Аристотеля. Картина, которую удастся воссоздать из этих разрозненных отрывков, наталкивает на мысль, что подобная одержимость числами, вероятно, объясняется тем, что пифагорейцы увлекались двумя занятиями, на первый взгляд не связанными, – музыкальными экспериментами и наблюдением над небесами.

Чтобы понять, как образовались все эти таинственные взаимосвязи между числами, небесами и музыкой, придется начать с интересного наблюдения: пифагорейцы придумали способ представлять числа в виде фигур из точек или камешков. Например, натуральные числа 1, 2, 3, 4, ... они представляли в виде треугольников (как на рис. 1). В частности, тре-

⁸ Популярное изложение пифагорейского учения см. в книге Strohmeier and Westbrook 1999.

⁹ О поразительных свойствах чисел превосходно рассказано в Wells 1986.

угольник, выстроенный из первых четырех целых чисел (треугольник из десяти камешков), называется тетрактида (тетрактис, тетрада, «четверица») и в глазах пифагорейцев символизировал совершенство и составляющие его элементы. Это нашло отражение в рассказе о Пифагоре, который приводит греческий сатирик Лукиан (ок. 120–180 гг.) Пифагор просит собеседника начать считать (цит. по Heath 1921). Тот считает: «Один, два, три, четыре...» Пифагор перебивает его: «Видишь? То, что ты принимаешь за четыре, на самом деле десять, идеальный треугольник и наша клятва». Философ-неоплатоник Ямвлих (ок. 250–325 гг.) говорит, что пифагорейцы и правда клялись особой клятвой (Iamblichus ca. 300 ADa; разбор см. у Guthrie 1987).

Именем клятву даю открывшего нам четверицу,
Неиссякаемой жизни источник.
(Здесь и далее пер. И. Мельниковой.)



Рис. 1

За что же так почитали тетрактиду? Дело в том, что в глазах пифагорейцев VI века до н. э. она воплощала в себе всю природу Вселенной. В геометрии – которая послужила трамплином для эпохальной древнегреческой научной революции – число 1 соотносилось с точкой, число два – с отрезком  или линией, число 3 – с плоскостью или поверхно-

стью , а 4 – с трехмерным телом, тетраэдром . Поэтому тетрактида, по всей видимости, охватывала все пространственные измерения, доступные органам чувств.

Однако это только начало. Тетрактида неожиданно проявилась даже в музыковедении. Считается, что именно Пифагор и пифагорейцы открыли, что если разделить струну так, чтобы длины частей относились как соседние натуральные числа, получаются гармоничные созвучные интервалы – это заметно, когда слушаешь выступление струнного квартета. Когда две подобные струны звучат одновременно, звук получается приятным, если отношения длин этих струн представляют собой простую пропорцию (Strohmeier and Westbrook 1999; Stanley 1687). Например, струны равной длины (соотношение 1:1) звучат в унисон, при соотношении 1:2 получается октава, 2:3 – чистая квинта, 3:4 – чистая кварта. Выходит, что тетрактида не только охватывает все пространственные измерения, но еще и может считаться воплощением математических соотношений, которые лежат в основе музыкальной гаммы. Этот волшебный на первый взгляд союз музыки и пространства стал для пифагорейцев важнейшим символом, дарующим чувство *гармонии* («взаимного соответствия частей») *космоса* («прекрасного порядка вещей»).

Где же тут место небесам? Пифагор и пифагорейцы сыграли в истории астрономии роль пусть не главную, однако существенную. Они одними из первых предположили, что Земля имеет форму шара (возможно, потому, что считали сферу совершенной с матема-

тико-эстетической точки зрения). Возможно, они также первыми установили, что планеты, Солнце и Луна независимо, сами по себе движутся с запада на восток, в направлении, противоположном ежедневному (очевидному) движению сферы неподвижных звезд. Энтузиасты-наблюдатели ночного неба не пропустили и бросающиеся в глаза основные свойства созвездий – количество звезд и общие очертания. Каждое созвездие характеризовалось числом входящих в него звезд и геометрической фигурой, которую они образуют. И именно эти характеристики лежат в основе пифагорейской доктрины чисел, что ясно видно на примере тетрактиды. Пифагорейцы были под таким впечатлением от того, что геометрические фигуры, созвездия и музыкальные гармонии зависят от чисел, что числа стали для них и строительным материалом Вселенной, и первоначалом самого ее существования. Неудивительно, что девиз Пифагора гласил: «Все есть число».

О том, насколько серьезно воспринимали эту максиму сами пифагорейцы, можно судить по двум замечаниям Аристотеля. В компилятивном трактате «Метафизика» Аристотель пишет: «В это же время и раньше так называемые пифагорейцы, занявшись математикой, первые развили ее и, овладев ею, стали считать ее начала началами всего существующего» (*здесь и далее пер. А. Кубицкого*). В другом месте Аристотель живо описывает, как пифагорейцы почитали числа, и упоминает об особой роли тетрактиды: «Эврит [ученик пифагорейца Филолая] устанавливал, какое у какой вещи число (например, это вот – число человека, а это – число лошади); и так же как те, кто приводит числа к форме треугольника и четырехугольника (курсив мой. – М. Л.), он изображал при помощи камешков формы животных и растений». Выделенная фраза – «кто приводит числа к форме треугольника и четырехугольника» – отсылает и к тетрактиде, и к другому интереснейшему пифагорейскому понятию: к идее гномона.

Слово «гномон» (в сущности, «маркер») происходит от названия вавилонского астрономического устройства для определения времени, похожего на солнечные часы¹⁰. Похоже, что этот аппарат привез в Грецию учитель Пифагора, естествоиспытатель Анаксимандр (ок. 611–547 гг. до н. э.). Не приходится сомневаться, что геометрические представления наставника и их применение в космологии – науке о Вселенной в целом – произвели на ученика сильное впечатление. Впоследствии слово «гномон» стало обозначать и чертежный угольник, и фигуру в виде двух полос, состыкованных под прямым углом, – если приложить ее к квадрату, получится квадрат большего размера (рис. 2). Обратите внимание, что если добавить, например, к квадрату 3×3 семь камешков, выложенных в форме прямого угла (гномона), получится квадрат 4×4 , состоящий из 16 камешков. Это фигурное изображение следующего свойства: в последовательности нечетных целых чисел 1, 3, 5, 7, 9, ... сумма любого количества последовательных членов (начиная с 1) всегда дает квадрат. Например, $1 = 1^2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ и так далее. Такие тесные отношения между гномоном и квадратом, который он «обнимает», пифагорейцы считали символом познания в целом: знание «обнимает» познанное. Следовательно, по мнению пифагорейцев, числа не просто описывали физический мир, но и лежали в основе умственных и эмоциональных процессов.

¹⁰ Подробно об истории и значении этого термина и о том, что означало это слово в разное время, см. Heath 1921. Математик Теон Смирнский (ок. 70–135 гг.) употреблял это слово применительно к фигурному выражению чисел, о чем говорится в его трактате «Изложение математических предметов, полезных при чтении Платона» (Theon of Smyrna ca. 130 AD).

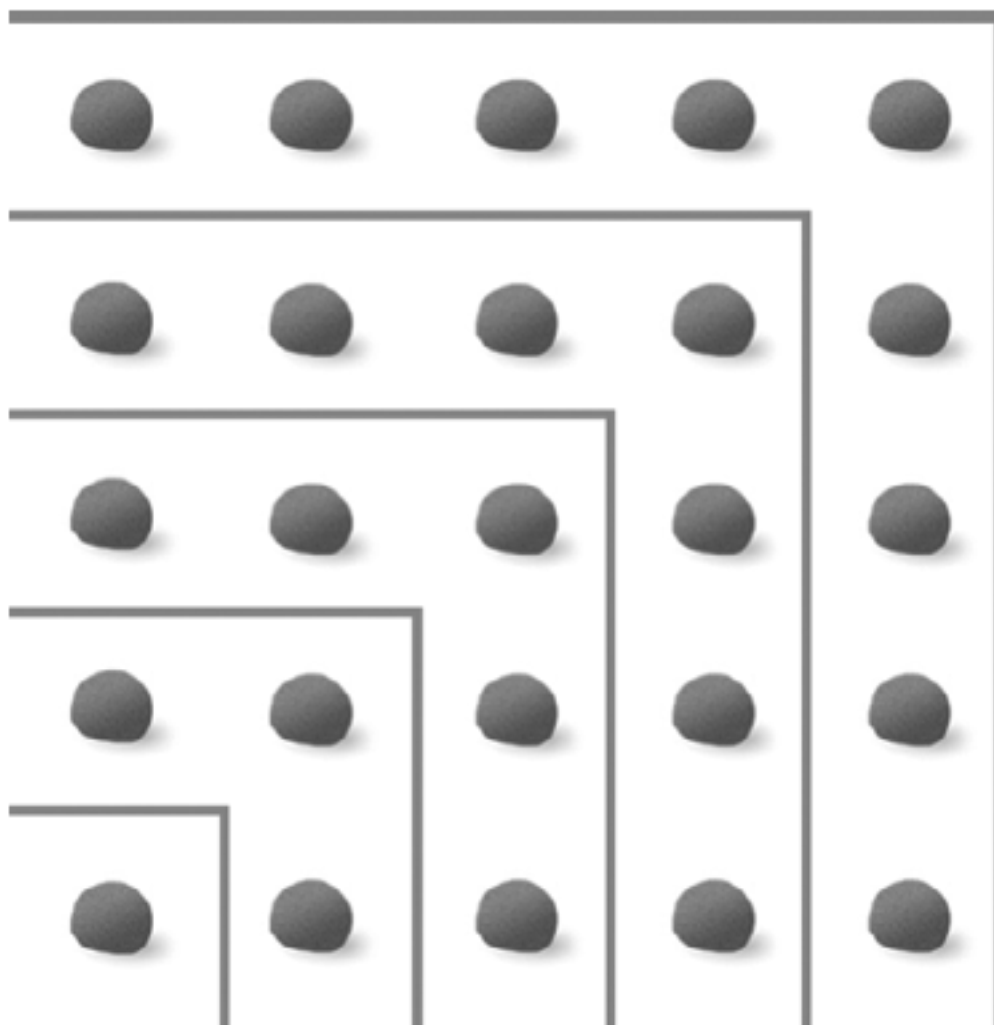


Рис. 2

Квадраты целых чисел, которые ассоциируются с гномонами, вероятно, привели Пифагора и к формулировке его знаменитой теоремы. Это прославленное математическое утверждение гласит, что у любого прямоугольного треугольника площадь квадрата, достроенного на самой длинной стороне – гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, достроенных на двух других сторонах – катетах (рис. 3). Карикатуристы под псевдонимом «Франк и Эрнест» посвятили истории открытия теоремы смешную картинку (рис. 4). Как видно на рис. 2, если добавить к квадрату 4×4 гномон $9 = 3^2$, получится новый квадрат 5×5 , то есть $3^2 + 4^2 = 5^2$. Поэтому числа 3, 4, 5 могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника. Наборы целых чисел, обладающие этим свойством (например, 5, 12, 13, поскольку $5^2 + 12^2 = 13^2$), называются пифагоровыми тройками.

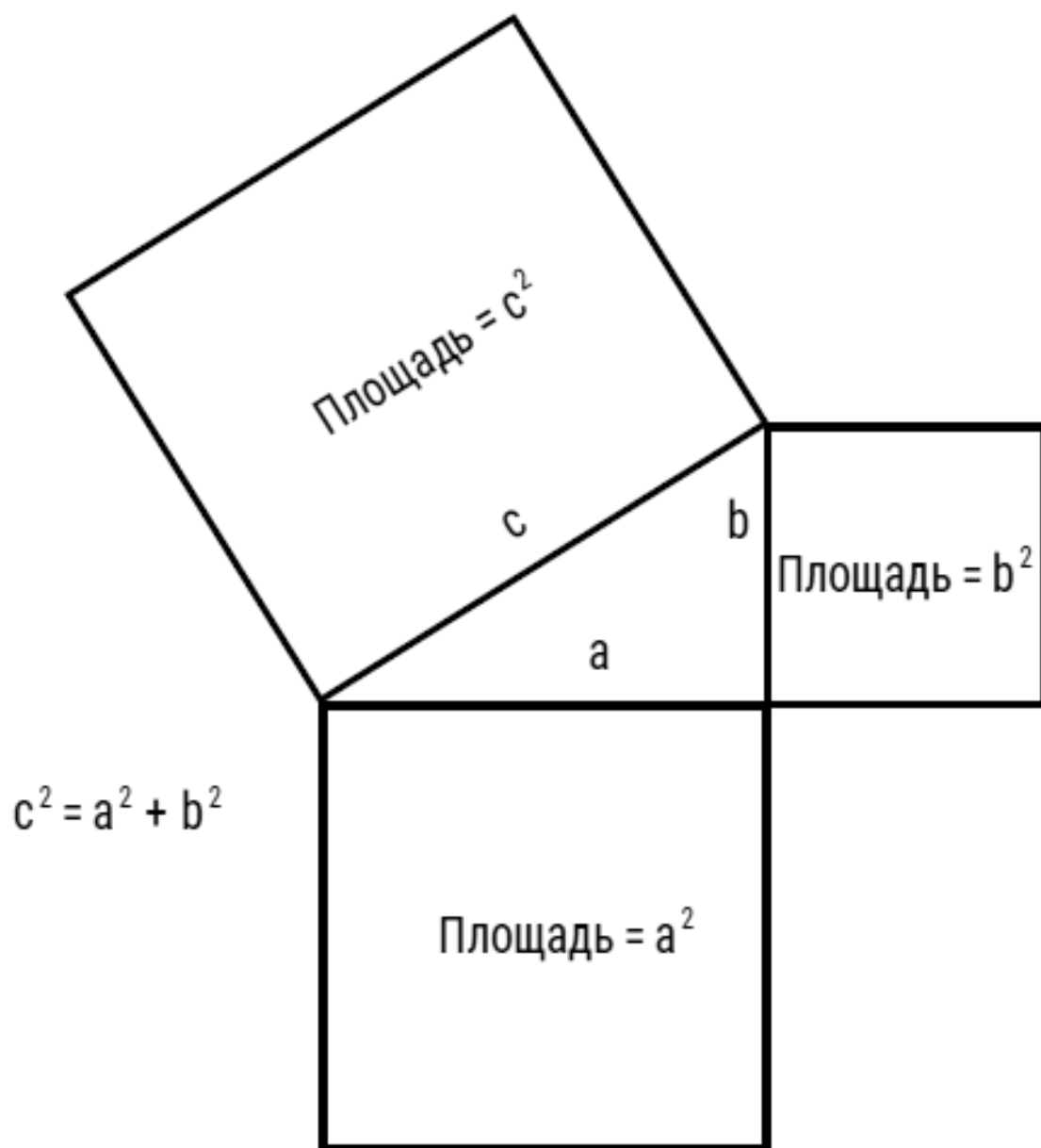


Рис. 3

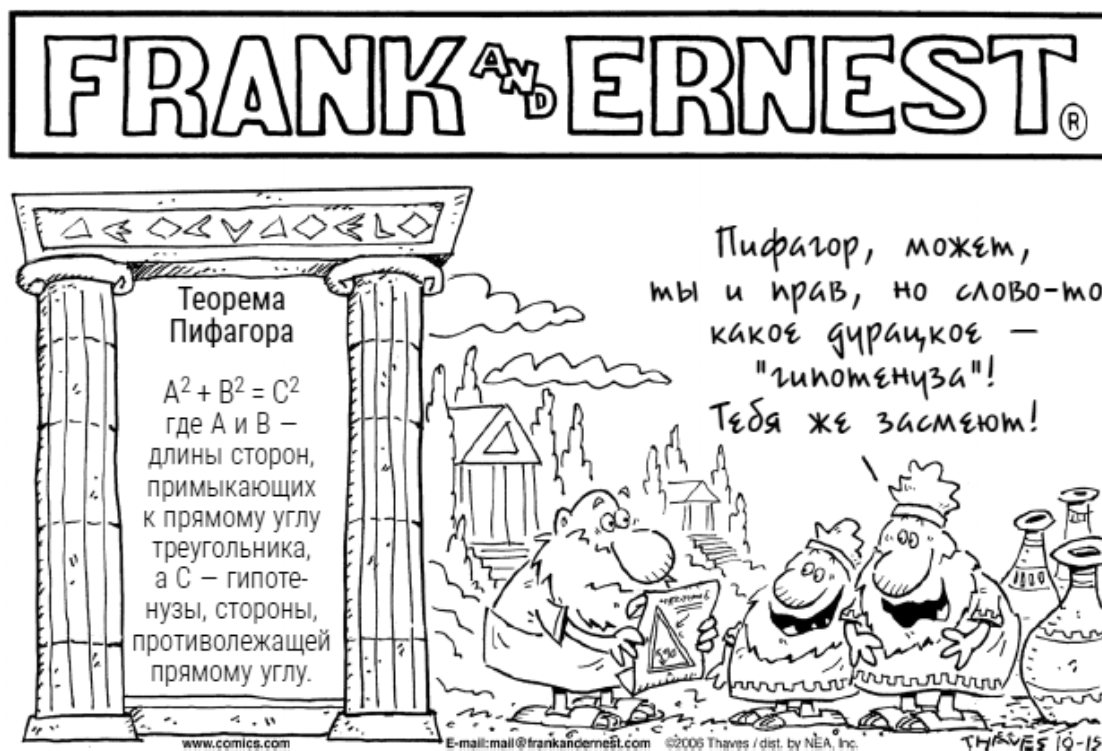


Рис. 4

Мало какие математические теоремы могут похвастаться такой «узнаваемостью», как теорема Пифагора. В 1971 году, когда республика Никарагуа выбирала «десять математических формул, изменивших облик планеты» для коллекционной серии марок, теорема Пифагора появилась на второй марке (рис. 5); на первой значилось « $1 + 1 = 2$ »).

Однако был ли Пифагор первым, кто сформулировал широкоизвестную теорему, которую ему приписывают? Некоторые древнегреческие историки в этом не сомневались. В комментарии к «Началам» Евклида (ок. 325–265 гг. до н. э.) – пространному труду по геометрии и теории чисел – греческий философ Прокл (ок. 411–485) писал: «Если мы захотим послушать тех, кто любит записывать древности, мы узнаем, что они приписывают эту теорему Пифагору и сообщают, что он принес в жертву быка за свое открытие» (здесь и далее пер. А. Щетникова)¹¹. Однако пифагоровы тройки изображены и на вавилонской клинописной табличке Plimton 322, которая датируется куда более ранним временем – приблизительно династией Хаммурапи (ок. 1900–1600 гг. до н. э.). Более того, геометрические конструкции, основанные на теореме Пифагора, обнаружены и в Индии, где этим соотношением пользовались при строительстве алтарей. Несомненно, о них знал и автор «Шатапатха-брахманы», комментария к древнеиндийским священным текстам, созданного, вероятно, по меньшей мере за несколько веков до Пифагора (Renon and Felliozat 1947, van der Waerden 1983). Впрочем, не так уж важно, первым ли Пифагор сформулировал теорему, получившую его имя, – главное, что постоянно обнаруживавшая себя разного рода взаимосвязь между числами, формами и Вселенной еще на шаг приблизила пифагорейцев к детальной метафизике порядка.

¹¹ Обратите внимание, что в этом комментарии Прокл ничего не говорит о собственных представлениях о том, был ли Пифагор первым, кто сформулировал эту теорему. История о быке упоминается в трудах Диогена Лаэртция, Порфирия и историка Плутарха (ок. 46–120 гг.). Все эти рассказы восходят к Аполлодору. Однако там говорится лишь о каком-то «знаменитом утверждении» и не уточняется, о каком именно утверждении идет речь. См. Laertius ca. 250 AD, Plutarch ca. 75 AD.



Рис. 5

Важнейшую роль в пифагорейском мире играла и другая идея – понятие о космических противоположностях. Поскольку система противоположностей была основным принципом ранней ионийской научной школы, было естественно, что ее приняли пифагорейцы с их одержимостью порядком. Более того, Аристотель рассказывает, что с идеей, что все на свете уравновешено, поскольку организовано в пары, соглашался даже врач по имени Алкмеон, живший в Кротоне в те годы, когда там существовала знаменитая школа Пифагора. Главная пара противоположностей состояла из *предела*, выраженного нечетными числами, и *беспредельного*, выраженного четными. Предел есть сила, наводящая порядок и гармонию в диком необузданном беспредельном. И хитросплетения Вселенной в целом, и перипетии человеческой жизни на уровне микрокосма, как полагали пифагорейцы, состоят из пар противоположностей, которые так или иначе соотносятся друг с другом, и управляются этими противоположностями. Эта несколько черно-белая картина мира описывалась «таблицей противоположностей», которая приведена в «Метафизике» Аристотеля:

предел	беспредельное
нечетное	четное
единое	множество
правое	левое
мужское	женское
покой	движение

прямое	кривое
свет	тьма
хорошее	дурное
квадратное	продолговатое

Философская концепция, выраженная в этой таблице, была распространена отнюдь не только в Древней Греции¹². Китайские инь и ян, где инь – это отрицание и тьма, а ян – утверждение и свет, отражают такое же мировоззрение. Примерно такие же идеи проникли и в христианство, где есть понятия рая и ада (и даже в заявления американских президентов наподобие «Вы или с нами, или с террористами»). У противоположностей есть и более общий смысл – всегда считается, что смерть оттеняет и подчеркивает смысл жизни, а знание особенно заметно по сравнению с невежеством.

Не все принципы пифагорейского учения имеют непосредственное отношение к числам. Стиль жизни замкнутого сообщества пифагорейцев был основан на вегетарианстве, убежденности в метемпсихозе – переселении бессмертных душ – а также на несколько загадочном запрете употреблять в пищу бобы. Существует несколько объяснений, почему пифагорейцам нельзя было есть бобы: то ли бобы напоминают видом детородный орган человека, то ли есть бобы – все равно что есть живую душу. Приверженцы последней версии считали, что когда человек, поевший бобов, выпускает ветры, то это погибшая душа словно бы выпускает дух.

В книге «*Philosophy for Dummies*» («Философия для чайников», Morris 1999) учение пифагорейцев кратко изложено следующим образом: «Все состоит из чисел, и не ешь бобы, потому что за это получишь по первое число».

Самая старая дошедшая до нас история о пифагорейцах довольно-таки поэтична и связана с представлением о переселении души в другие живые существа (Joost-Gaugier 2006). Она сохранилась в стихах поэта Ксенофана Колофонского, жившего в VI веке до н. э.

Как-то в пути увидав, что кто-то щенка обижает,
Он [Пифагор], пожалевши щенка, молвил такие слова:
«Полно бить, перестань! Живет в нем душа дорогого
Друга: по вою щенка я ее разом признал».

(Пер. М. Гаспарова.)

Влияние Пифагора явно прослеживается не только в учении древнегреческих философов – его непосредственных последователей, – но и в том, как строился учебный план средневековых университетов. Семь предметов, которые там преподавали, делились на *тривиум* – диалектику, грамматику и риторику – и *квадриум*, в который входили любимые темы пифагорейцев – геометрия, арифметика, астрономия и музыка. Небесная «гармония сфер» – музыка, которую якобы исполняли планеты на орбитах и которую, по свидетельствам учеников, слышал один лишь Пифагор, – вдохновляла равным образом и поэтов, и ученых. Знаменитый астроном Иоганн Кеплер (1571–1630), открывший законы движения планет, назвал один из своих революционных трудов «*Harmonices Mundi*» – «Гармонии мира». И вполне в

¹² Такая космология основана на идее, что реальность возникла из Вещества (которое считалось неопределенным), подвергшегося воздействию Формы (то есть предела).

пифагорейском духе сочинил даже музыкальные «мотивы» разных планет (это же проделал три века спустя композитор Густав Холст).

Однако вернемся к теме нашей книги: если снять с пифагорейской философии мистический покров, обнаружится каркас, по которому можно сделать множество важнейших выводов касательно математики, ее природы и ее связи как с физическим миром, так и с человеческим разумом¹³. Пифагор и пифагорейцы – первопроходцы на пути поисков вселенского порядка. Их можно считать основателями чистой математики, поскольку, в отличие от своих предшественников – вавилонян и египтян, – они подходили к математике абстрактно, в отрыве от каких бы то ни было практических целей. А вот ответить на вопрос, пифагорейцы ли поставили математику на службу естественным наукам, уже сложнее. Да, пифагорейцы связывали все природные явления с числами, однако предметом их изучения были числа как таковые, а не природные явления или их причины. Для научного исследования такой путь не слишком перспективен. И все же в основе пифагорейского учения лежало общее представление о существовании универсальных законов природы. Это представление, ставшее краеугольным камнем современной науки, вероятно, коренится еще в идее Рока в древнегреческой трагедии. Вплоть до конца эпохи Возрождения твердая вера в реальность совокупности законов, которые способны объяснить все природные явления, далеко опережала данные любых наблюдений и экспериментов, и лишь Галилей, Декарт и Ньютон обратили ее в гипотезу, которую можно обосновать методом логической индукции.

Пифагорейцам принадлежит и другая заслуга – они сами обнаружили, что их «культ числа», к сожалению, не проходит проверку реальностью. Это открытие, конечно, спустило их с небес на землю. Целых чисел 1, 2, 3, ... не хватало даже для того, чтобы вывести из них математику, не говоря уже об описании Вселенной.

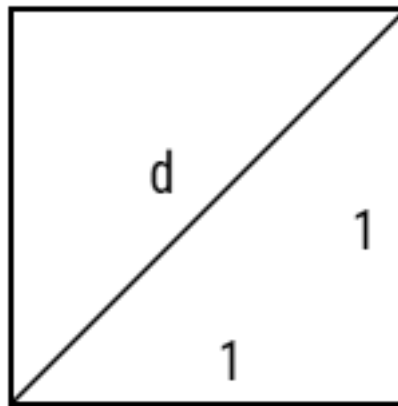


Рис. 6

Рассмотрим квадрат на рис. 6, сторона которого принята за единицу, а длину диагонали мы обозначили d . Мы без труда найдем d при помощи теоремы Пифагора, применив ее к любому из двух прямоугольных треугольников, на которые поделен квадрат. Согласно теореме Пифагора, квадрат диагонали (гипотенузы) равен сумме квадратов двух катетов (коротких сторон): $d^2 = 1^2 + 1^2$, то есть $d^2 = 2$. Поскольку мы знаем, что квадрат – это положительное число, его легко найти, если взять квадратный корень (например, если $x^2 = 9$, то положительное число $x = \sqrt{9} = 3$). Поэтому из $d^2 = 2$ следует, что $d = \sqrt{2}$ единиц. Итак, соотношение длины диагонали к длине стороны квадрата – это число $\sqrt{2}$. И вот тут-то пифаго-

¹³ О вкладе пифагорейцев в научный прогресс и об их влиянии см. Huffman 1999, Riedweg 2005, Joost-Gaugier 2006, а также Huffman 2006 в Stanford Encyclopedia of Philosophy.

рейцев и ждало страшное потрясение – открытие, которое не оставило камня на камне от тщательно сконструированной пифагорейской концепции дискретных чисел. Один пифагорец (возможно, это был Гиппас из Метапонта, живший в первой половине V века до н. э. (Fritz 1945)) сумел доказать, что квадратный корень из двух нельзя выразить в виде отношения каких бы то ни было целых чисел. Иначе говоря, даже если мы располагаем бесконечным множеством целых чисел, поиски такой их пары, отношение которой даст нам $\sqrt{2}$, изначально обречены на провал.

Если число можно выразить в виде отношения двух целых чисел (например, $3/17$, $2/5$, $1/10$, $6/1$), его называют *рациональным числом* (собственно, латинское слово *ratio* и означает «отношение»). Пифагорейцы доказали, что $\sqrt{2}$ – не рациональное число. Более того, вскоре после этого открытия обнаружилось, что и $\sqrt{3}$, $\sqrt{17}$ и вообще квадратный корень любого числа, которое не представляет собой точный квадрат (16, 25 и т. д.), – тоже не рациональные числа. Последствия были самые серьезные: пифагорейцы доказали, что к бесконечному множеству рациональных чисел придется добавить бесконечное множество чисел другой разновидности – сегодня мы называем их *иррациональными числами*. Важность этого открытия для дальнейшего развития математического анализа невозможно переоценить. Помимо всего прочего, оно привело и к тому, что в XIX веке признали существование счетных и несчетных бесконечностей¹⁴. Однако на самих пифагорейцев это открытие произвело настолько ошеломляющее впечатление, что философ Ямвлих пишет, что тот, кто открыл иррациональные числа, «вызвал, как говорят, такую ненависть, что его не только изгнали из общины и отлучили от пифагорейского образа жизни, но и соорудили ему надгробие, как будто действительно ушел из жизни тот, кто некогда был их товарищем».

Однако пифагорейцам принадлежит заслуга, вероятно, даже более важная, чем открытие иррациональных чисел, – то, что именно они первыми стали настаивать на математическом доказательстве, процедуре, основанной исключительно на логических рассуждениях, при помощи которой можно было раз и навсегда установить истинность любого математического предположения, исходя из некоторых постулатов. До древних греков даже сами математики не считали, что кому-то хоть сколько-нибудь любопытно, какие умственные упражнения привели их к тому или иному открытию. Если какой-то математический рецепт можно было с успехом применять на практике, скажем, чтобы распределять участки земли, иного доказательства не требовалось. А вот греки захотели объяснить, почему его можно с успехом применять на практике. Хотя саму идею доказательства первым предложил философ Фалес Милетский (ок. 625–547 гг. до н. э.), именно пифагорейцы превратили эту привычку в совершенный инструмент, позволявший удостовериться в истинности математических утверждений. Значение этого прорыва в логике колоссально. Когда математика стала прибегать к доказательствам, основанным на постулатах, сразу же оказалось, что она покоится на куда более прочном фундаменте, чем любая другая научная дисциплина, которую обсуждали философы того времени. Как только удавалось представить строгое доказательство, основанное на последовательности умозаключений, где не было никаких логических оплошностей, истинность соответствующего математического утверждения становилась незыблемой навечно. Особый статус математического доказательства признавал даже Артур Конан Дойл, создатель самого знаменитого сыщика в мире. В «Этюде в багровых тонах» Шерлок Холмс объявляет, что его выводы «безошибочны, словно теоремы Эвклида» (*пер. Н. Трениевой*).

Для Пифагора и пифагорейцев не было никаких сомнений, изобретают они математику или открывают: математика для них была реальна, незыблема, вездесуща и гораздо более совершенна, чем любое мыслимое творение жалкого человеческого разума. Пифагорейцы

¹⁴ В рамках настоящей книги я не обсуждаю темы наподобие трансфинитных чисел и трудов Кантора и Дедекинда. Об этом прекрасно рассказано в популярных книгах Aczel 2000, Barrow 2005, Devlin 2000, Rucker 1995 и Wallace 2003.

буквально воплотили вселенную в математике. В сущности, пифагорейцы не считали, что Бог – математик, они считали, что математика есть Бог (см. разностороннее обсуждение этого тезиса в Netz 2005)!

Значение пифагорейской философии выходит далеко за рамки ее конкретных достижений. Пифагорейцы подготовили почву и в определенном смысле составили перечень важнейших вопросов для следующего поколения философов – в частности для Платона – и заложили основное направление развития западной мысли.

Во глубину платоновской пещеры

Знаменитый английский математик и философ Альфред Норт Уайтхед (1861–1947) однажды заметил, что «самое надежное обобщение, которое можно сделать при изучении истории западной философии, – что вся она представляет собой примечания к Платону» (Whitehead 1929).

И в самом деле, Платон (ок. 428–347 гг. до н. э.) первым свел воедино самые разные темы – от математики, науки и лингвистики до религии, этики и искусства – и понял, что нужно подходить к ним одинаково, в результате чего, собственно, и появилась философия как научная дисциплина. Философия для Платона была не каким-то отвлеченным предметом, который стоит особняком от повседневной жизни, а общим руководством, как нужно проживать жизнь, как отличать истину от лжи и как строить политику. В частности, Платон считал, что философия способна открыть перед нами царство истин, которое простирается далеко за пределы того, что мы воспринимаем при помощи органов чувств, и даже того, что мы можем вывести на основании простого здравого смысла. Кто же был этот неутомимый искатель чистого знания, абсолютного блага и вечных истин?¹⁵

Платон, сын Аристона и Периктионы, родился в Афинах или в Эгине. На рис. 7 приведена герма Платона – скорее всего, копия с более раннего греческого оригинала, созданного в IV веке до н. э. Платон был весьма родовит и по отцовской, и по материнской линии: среди его предков были прославленные исторические деятели, в частности великий законодатель Солон и последний царь Аттики Кодр. Дядя Платона Хармид и двоюродный брат Критий были старыми друзьями знаменитого философа Сократа (ок. 470–399 гг. до н. э.) – многие исследователи полагают, что это знакомство в основном и сформировало взгляды юного Платона. Поначалу Платон хотел стать политиком, однако партия, взгляды которой ему тогда импонировали, была замешана в насильственных действиях, и это отвратило его от политического поприща. Именно нелюбовь к политике, вероятно, и побудила Платона в последующие годы изложить свои представления о том, каким должно быть фундаментальное образование государственных мужей будущего. Он даже попытался быть наставником правителя Сиракуз Дионисия II, впрочем, к успеху это не привело.

¹⁵ Из одних названий книг и статей о Платоне можно, разумеется, составить целый том. Приведу лишь несколько трудов, которые представляются мне весьма познавательными. О Платоне вообще – Hamilton and Cairns 1961, Havelock 1963, Gosling 1973, Ross 1951, Kraut 1992. О Платоне и математике – Heath 1921, Cherniss 1951, Mueller 1991, Fowler 1999, Herz-Fischler 1998.

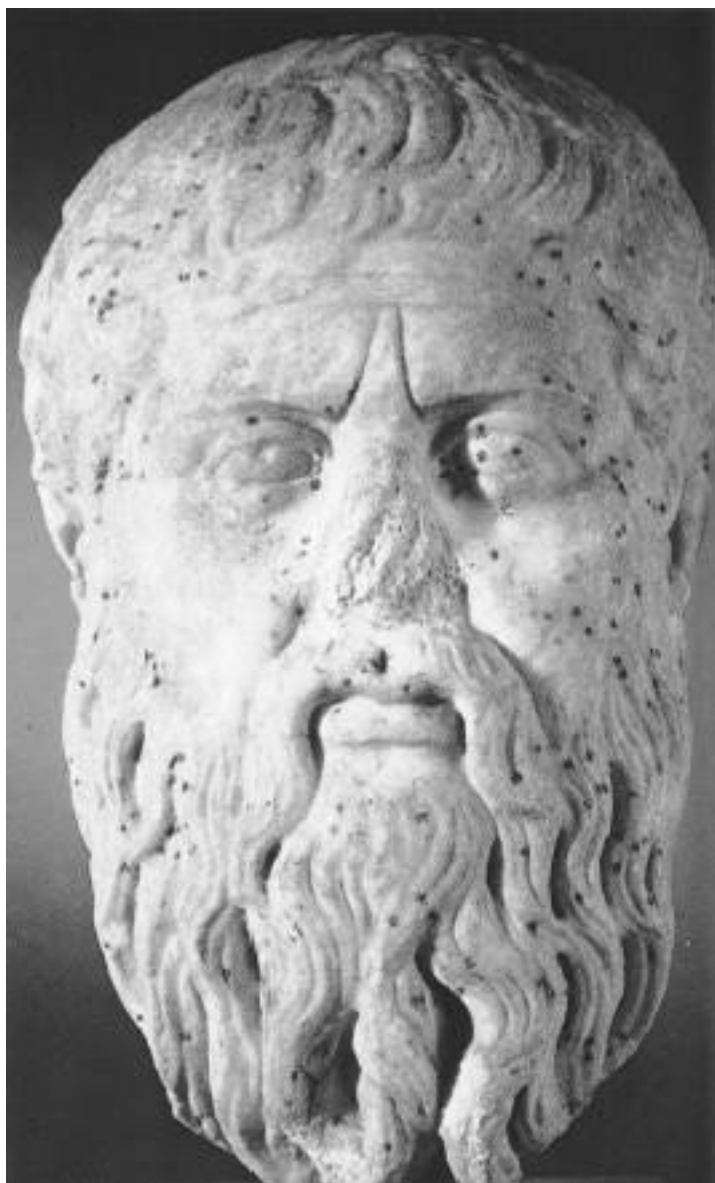


Рис. 7

После казни Сократа в 399 году до н. э. Платон отправился в длительное путешествие, которое завершилось лишь с основанием его легендарной научно-философской школы, Академии, около 387 года до н. э. Платон возглавлял Академию (был ее *схолархом*) до самой своей смерти; на посту его сменил Спевсипп, приходившийся ему племянником. Академия, в отличие от современных научно-образовательных учреждений, была скорее неформальным клубом интеллектуалов, которые под руководством Платона изучали самые разные предметы. Не было ни платы за обучение, ни устоявшегося учебного плана – не было даже преподавателей в привычном нам смысле слова. Однако же те, кто хотел поступить в Академию, должны были удовлетворять одному довольно необычному требованию. Согласно речи императора Юлиана Отступника, правившего в IV веке (уже нашей эры), над входом в Академию Платона висела массивная доска с надписью. Надпись гласила: «Не геометр да не войдет!»¹⁶. Поскольку с основания Академии до первого описания ее девиза прошло

¹⁶ Речь была написана в 362 году н. э., однако о содержании надписи в ней ничего не говорится. Сам текст обнаружен в заметке на полях рукописи Элия Аристида. Заметка, вероятно, сделана оратором Сопратом, жившим в IV веке. Она гласит: «На фронте Платоновой школы было написано: “Не геометр да не войдет!”». Это вместо “несправедливый” или “нечест-

не меньше 800 лет, нет никакой уверенности, что надпись вообще существовала. Однако не приходится сомневаться, что выраженная в этом требовании идея отражает личное мнение Платона. В одном из своих знаменитых диалогов «Горгий» Платон пишет: «... Как много значит и меж богов, и меж людей равенство, – я имею в виду геометрическое равенство» (*пер. С. Маркиша*).

«Студенты» Академии по большей части сами себя обеспечивали, и некоторые, в том числе, например, великий Аристотель, оставались там лет по двадцать. Платон считал, что такое длительное общение творческих умов – лучшее средство для порождения новых идей в самых разных сферах, от отвлеченной метафизики и математики до этики и политики. Чистота помыслов и божественная возвышенность учеников Платона прекрасно отражены на картине «Школа Платона» бельгийского художника-символиста Жана Дельвиля (1867–1953). Чтобы подчеркнуть духовное совершенство учеников, Дельвиль изобразил их обнаженными, с андрогинными телами, поскольку именно таковы должны были быть первые люди.

Когда я узнал, что археологи не смогли найти никаких следов Академии Платона, то очень огорчился¹⁷. Летом 2007 года я побывал в Греции и решил найти какой-нибудь заместитель. Платон упоминает, что его излюбленным местом для бесед с друзьями была Стоя Зевса (крытая галерея, выстроенная в V веке до н. э.). Я нашел развалины этой стои в северо-западной части древней афинской агоры, которая была центром общественной жизни города (рис. 8). Признаться, даже при сорокапятиградусной жаре меня пробрал голод, когда я шагнул на те же каменные плиты, где сотни и даже тысячи раз ступала нога этого великого человека.

стивый», поскольку геометрия стремится к честности и справедливости». Видимо, из этой заметки следует, что слова «не геометр» заменяли у Платона слова «несправедливый или нечестивый человек» в надписи, которую обычно помещали над входом в святилища («Нечестивый да не войдет!»). Впоследствии эту историю рассказывали целых пять александрийских философов VI века, и она попала даже в книгу «Хилиады» эрудита XII века Иоанна Цеца (ок. 1110–1180). Подробнее об этом см. Fowler 1999.

¹⁷ Обзор многих безуспешных археологических попыток найти Академию дан в Glucker 1978.



Рис. 8

Легендарная надпись над входом в Академию прямо и недвусмысленно говорит об отношении Платона к математике. Более того, львиная доля значительных математических исследований, которые велись в IV веке до н. э., были так или иначе связаны с Академией. Однако сам Платон не обладал ни математическими талантами, ни какими-либо существенными инженерными задатками, и непосредственный его вклад в развитие математических наук был, пожалуй, совсем невелик. Платон был скорее восторженным зрителем, вдохновителем и руководителем, поставщиком интересных задач и образованным критиком. Философ и историк Филодем, живший в I веке, рисует ясную картину: «В то время математика стремительно двигалась вперед, причем Платон, словно главный зодчий, ставил задачи, а математики усердно исследовали их» (см. Cherniss 1945, Mekler 1902). А математик и философ-неоплатоник Прокл добавляет: «...И геометрия, равно как и прочие математические науки, получила его [Платона] стараниями величайшее развитие: известно, сколь часто он использует в своих сочинениях математические рассуждения и повсюду пробуждает ими восторг в преданных философии» (Cherniss 1945, Proclus ca. 450). Иначе говоря, Платон, чьи познания в математике были достаточно широкими для своего времени, беседовал с математиками на равных и ставил им задачи, хотя его личные заслуги в развитии математики были незначительны.

Еще один яркий пример любви Платона к математике мы находим в его, пожалуй, лучшей книге – «Государство», где этика, эстетика, политика и метафизика сведены в единую систему головокружительной красоты. Главный герой «Государства» – Сократ, однако в книге VII именно Платон предлагает смелый план воспитания и образования будущих правителей утопических государств. Это строгая, пусть и несколько идеализированная программа предполагает обучение с самых ранних лет посредством игр, путешествий и физических упражнений. Затем подающих надежды детей отбирают и не менее десяти лет учат

математике и пять лет – диалектике, после чего они в течение пятнадцати лет набираются практического опыта, то есть служат военачальниками и предаются другим занятиям, подобающим молодежи. Платон подробно объясняет, почему он считает, что именно так следует воспитывать и обучать будущих политиков (Plato ca. 360 BC.).

Однако не следует, чтобы к власти приходили те, кто прямо-таки в нее влюблен. А то с ними будут сражаться соперники в этой любви... Кого же иного заставишь ты встать на страже государства, как не тех, кто вполне сведущ в деле наилучшего государственного правления, а вместе с тем имеет и другие достоинства и ведет жизнь более добродетельную, чем ведут государственные деятели? (*Здесь и далее пер. А. Егунова.*)

Освежает, правда? По правде говоря, такая строгая и трудоемкая программа обучения во времена Платона была, пожалуй, неосуществима, однако Джордж Вашингтон тоже считал, что будущих политиков хорошо бы обучать математике и философии.

Мало того, что без науки о числах в той или иной степени невозможно сделать ни шагу в цивилизованной жизни, – исследование математических истин приучает ум к методу и точности выводов; подобное занятие весьма подобает существу разумному. Когда бытие затуманено и растерянному исследователю столь многое представляется неясным – именно тогда находит себе опору дар рационального мышления. С прочной позиции математического и философского доказательства мы незаметно переходим к куда более благородным умозаключениям и тонким раздумьям (Washington 1788).

Что же касается вопроса о природе математики, Платон-философ сыграл здесь даже более важную роль, чем Платон-математик. Здесь его идеи, оставившие ярчайший след, не просто ставят его выше всех математиков и философов его поколения, но и делают самой влиятельной фигурой последующих тысячелетий.

Представление Платона о том, что такое на самом деле математика, имеет прямое отношение к его знаменитой «аллегории Пещеры». Платон подчеркивает, как опасно доверять сведениям, полученным посредством органов чувств человека. Он утверждает, что то, что мы воспринимаем как реальный мир, на самом деле не более реально, чем тени, отбрасываемые на стены пещеры¹⁸. Приведу этот примечательный отрывок из «Государства».

...Посмотри-ка: ведь люди как бы находятся в подземном жилище наподобие пещеры, где во всю ее длину тянется широкий просвет. С малых лет у них там на ногах и на шее оковы, так что людям не двинуться с места, и видят они только то, что у них прямо перед глазами, ибо повернуть голову они не могут из-за этих оков. Люди обращены спиной к свету, исходящему от огня, который горит далеко в вышине, а между огнем и узниками проходит верхняя дорога, огражденная – глянь-ка – невысокой стеной вроде той ширмы, за которой фокусники помещают своих помощников, когда поверх ширмы показывают кукол... Так представь же себе и то, что за этой стеной другие люди несут различную утварь, держа ее так, что она видна поверх стены; проносят они и статуи, и всяческие изображения живых существ, сделанные из камня и дерева... Разве ты думаешь, что, находясь в таком положении, люди что-нибудь видят, свое ли или чужое, кроме теней, отбрасываемых огнем на расположенную перед ними стену пещеры?

¹⁸ Интересное обсуждение см. в Stewart 1905.

Согласно Платону, все мы – все человечество – не слишком отличаемся от этих узников в пещере, которые принимают тени за реальность (на рис. 9 приведена гравюра Яна Санредама, иллюстрирующая эту аллегория (1604)). В частности, подчеркивает Платон, математические истины относятся не к окружностям, треугольникам и квадратам, которые можно нарисовать на клочке папируса или начертить палочкой на песке, а к абстрактным объектам, которые пребывают в идеальном мире – вместилище подлинных форм и совершенств. Этот платоновский мир математических понятий отделен от мира физического, и именно там, в этом первом мире, верны математические суждения наподобие теоремы Пифагора. Прямоугольный треугольник, который мы чертим на бумаге, лишь несовершенная копия, приближение к истинному, абстрактному треугольнику.

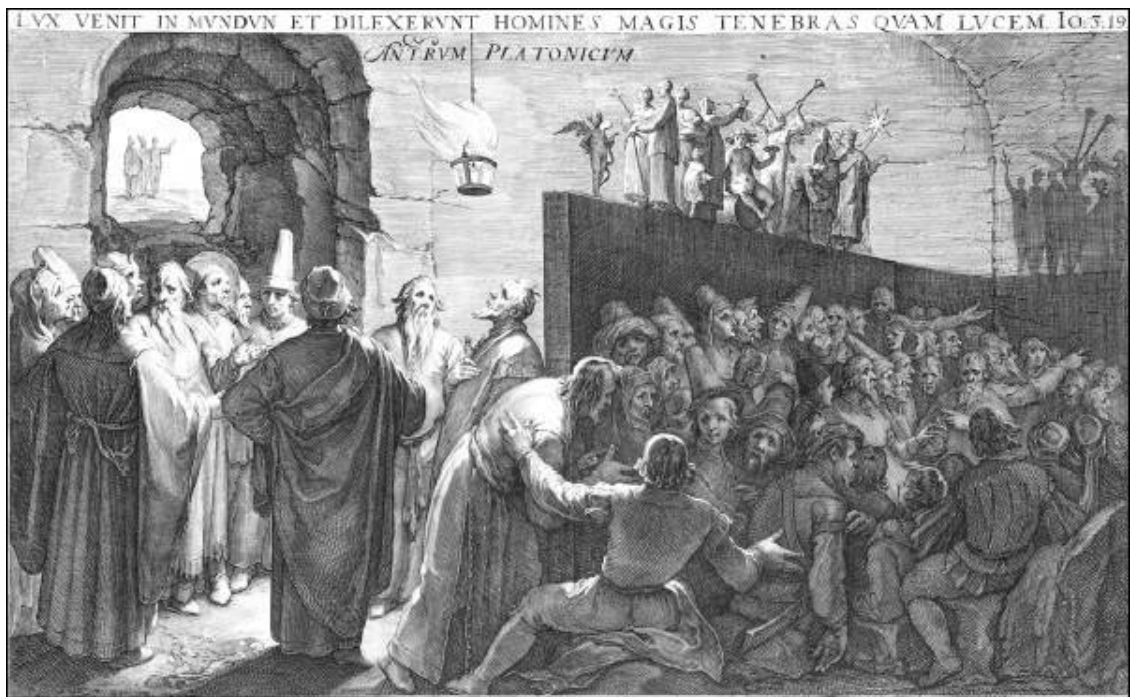


Рис. 9

Другая фундаментальная проблема, которую Платон подробно исследовал, – это природа математического доказательства как процесса, основанного на *аксиомах* и *постулатах*. Аксиомы – это основополагающие утверждения, истинность которых считается самоочевидной. Например, первая аксиома евклидовой геометрии гласит: «Между любыми двумя точками можно провести прямую». В «Государстве» Платон прекрасно сочетает понятия о постулатах и о мире математических форм.

...Я думаю, ты знаешь, что те, кто занимается геометрией, счетом и тому подобным, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чет и нечет, фигуры, три вида углов и прочее в том же роде. Это они принимают за исходные положения и не считают нужным отдавать в них отчет ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно. Исходя из этих положений, они разбирают уже все остальное и последовательно доводят до конца то, что было предметом их рассмотрения... Но ведь когда они вдобавок пользуются чертежами и делают отсюда выводы, их мысль обращена не на чертеж, а на те фигуры, подобием которых он служит. Выводы свои они делают только для четырехугольника самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали, которую они

начертили. Так и во всем остальном. То же самое относится к произведениям ваяния и живописи: от них может падать тень, и возможны их отражения в воде, но сами они служат лишь образным выражением того, что можно видеть *не иначе как мысленным взором* (курсив мой. – М. Л.).

Представления Платона заложили основу платонизма – такое название получили его идеи в философии вообще и в проблеме природы математики в частности¹⁹. Платонизм в самом широком смысле слова предполагает веру в некие вечные, неизблемые абстрактные объекты, абсолютно независимые от эфемерного мира, которые мы воспринимаем посредством органов чувств. Согласно платонизму, реальное существование математических понятий – столь же объективный факт, сколь и существование самой Вселенной. Существуют не только натуральные числа, окружности и квадраты, но и мнимые числа, функции, фракталы, неевклидовы геометрии, бесконечные множества, а также самые разные теоремы, которые их описывают. Короче говоря, каждое математическое понятие или «объективно истинное» суждение (подробнее об этом чуть позже), когда бы то ни было сформулированные или возникшие в чьем-то воображении, и бесконечное количество понятий и утверждений, еще не открытых, – все это абсолютные сущности, или *универсалии*, которые нельзя ни создать, ни уничтожить. Они существуют независимо от наших знаний о них. Нет нужды говорить, что это не физические объекты, они обитают в автономном мире вечных сущностей. Математики для платонизма – исследователи неведомых земель, они могут лишь открыть математические истины, но не изобрести их. Америка существовала задолго до того, как ее открыл Колумб (или Лейф Эрикссон), – так и математические теоремы существовали в платоновском мире задолго до того, как вавилоняне приступили к математическим изысканиям. Для Платона подлинно, в полной мере существуют лишь эти абстрактные математические формы и идеи, поскольку лишь в математике, по его мнению, можно обрести совершенно точные и объективные познания. Следовательно, по Платону, математика тесно связана с божественным (подробнее об этом см. Mueller 2005). В диалоге «Тимей» бог-творец формирует мир при помощи математики, а в «Государстве» знание математики становится главным шагом на пути к познанию божественных форм. Платон не применяет математику для формулировки некоторых законов природы, которые можно проверить экспериментально. Для него математический характер мира – всего лишь следствие того, что «Бог всегда остается геометром».

Платон распространил идеи «истинных форм» и на другие дисциплины, в особенности на астрономию. Он считал, что при изучении подлинной астрономии «мы должны оставить небеса в покое»²⁰ и не пытаться рассчитывать взаимное положение и видимое движение звезд. Платон полагал, что истинная астрономия – это наука, изучающая законы движения в некоем идеальном математическом мире, движения, для которого наблюдаемые небеса – лишь иллюстрация (в том же смысле, в каком геометрические фигуры, начерченные на папирусе, лишь иллюстрируют истинные фигуры).

Представления Платона об астрономических исследованиях казались противоречивыми даже некоторым самым убежденным платоникам. Сторонники его идей утверждали, что на самом деле Платон считает не что подлинная астрономия должна заниматься какими-то идеальными небесами, не имеющими отношения к наблюдаемым, но что ее задача – изучать реальное движение небесных тел, а не искаженное, какое мы наблюдаем с Земли. Однако многие мыслители указывают, что, если понимать максимум Платона слишком бук-

¹⁹ Интересное обсуждение платонизма и его места в философии математики см. в книгах Tiles 1996, Mueller 1992, White 1992, Russell 1945, Tait 1996. Превосходное популярное изложение можно найти в Davis and Hersch 1981, Barrow 1992.

²⁰ Платон рассуждает об астрономии и движении планет в «Государстве» (Plato ок. 360 до н. э.), в «Тимее» и в «Законах». Следствия точки зрения Платона обсуждаются в Vlastos 1975 и Mueller 1992.

важно, это сильно затруднило бы развитие наблюдательной астрономии как науки. Впрочем, как бы мы ни толковали отношение Платона к астрономии, во всем, что касается основ математики, платонизм играет ведущую роль.

Но существует ли платоновский мир математики на самом деле? И если да, то, собственно, где? И что это за «объективно истинные» утверждения, которые населяют этот мир? Или же математики, которые придерживаются платонизма, просто выражают те же романтические представления, каких, как говорят, придерживался великий художник Возрождения Микеланджело? Согласно легенде, Микеланджело был убежден, что его великолепные скульптуры уже существуют в глубине мраморных глыб, а его задача – лишь стесать все лишнее.

Современные платоники (да-да, они есть, и их представления мы подробно опишем в следующих главах) настаивают, что платоновский мир математических форм совершенно реален, и предлагают конкретные, по их мнению, примеры объективно истинных математических утверждений, которые обитают в этом мире.

Рассмотрим следующее простое и понятное утверждение. Каждое четное целое число больше двух можно представить в виде суммы двух простых чисел (делящихся только на себя и единицу). Это несложное на первый взгляд утверждение называется *проблемой Гольдбаха*, поскольку именно в такой формулировке обнаружено в письме прусского математика-любителя Кристиана Гольдбаха (1690–1764) Леонарду Эйлеру от 7 июня 1742 года. Убедиться в верности этого утверждения для первых нескольких четных чисел совсем не трудно: $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$; $10 = 3 + 7$ (или $5 + 5$); $12 = 5 + 7$; $14 = 3 + 11$ (или $7 + 7$); $16 = 5 + 11$ (или $3 + 13$) и так далее. Утверждение это до того просто, что британский математик Г. Г. Харди объявил, что «любой дурак мог бы догадаться». Более того, французский математик и философ Рене Декарт высказал это предположение еще до Гольдбаха. Однако выяснилось, что сформулировать проблему легко, а вот доказать – совсем другое дело. В 1966 году китайский математик Чэнь Цзинжунь сделал существенный шаг по пути к доказательству. Он сумел показать, что всякое достаточно большое четное число представляет собой сумму двух чисел, одно из которых простое, а второе имеет не более двух простых делителей. К концу 2005 года португальский ученый Томаш Оливейра э Сильва показал, что это утверждение верно для чисел, не превышающих 3×10^{17} (до трехсот тысяч триллионов). И все же, несмотря на колоссальные усилия многих талантливых математиков, на сегодняшний день, когда я пишу эти строки, общее доказательство так и не удалось найти. К желаемому результату не привел даже дополнительный стимул в виде миллиона долларов, которые предложили в виде награды всякому, кто найдет доказательство в срок с 20 марта 2000 года по 20 марта 2002 года (в рамках рекламной кампании романа А. К. Доксиадиса «Дядюшка Петрос и проблема Гольдбаха» [Doxiadis 2000]).

Тут-то перед нами и встает вопрос о значении «объективной истины» в математике. Предположим, что в 2016 году все же будет представлено строгое доказательство проблемы Гольдбаха. Можно ли будет тогда сказать, что это утверждение было верным уже тогда, когда о нем задумался Декарт? Многие, наверное, согласятся, что это глупый вопрос. Ясно, что если истинность утверждения доказана, значит, оно всегда было истинным, даже до того, как мы в этом убедились. Или рассмотрим другой невинный на вид пример – гипотезу Каталана (подробнее см. Ribenboim 1994). Числа 8 и 9 – последовательные целые числа, и каждое из них равно степени натурального числа – $8 = 2^3$ и $9 = 3^2$. В 1844 году бельгийский математик Эжен Шарль Каталан (1814–1894) предположил, что среди всех возможных степеней целых чисел лишь одна пара последовательных чисел, за исключением 0 и 1, представляет собой степени других целых чисел, и это 8 и 9. Иными словами, можно хоть всю жизнь записывать все целые степени, однако не найдешь другой пары таких чисел, которые различаются на 1. На самом деле, еще в 1342 году франко-еврейский философ и математик

Леви бен Гершом (1288–1344) доказал малую часть этой гипотезы: он показал, что 8 и 9 – это единственные степени 2 и 3, которые различаются на 1. Большой шаг вперед был сделан математиком Робертом Тейдеманом в 1976 году. И все же доказательство гипотезы Каталана в общем виде ставило в тупик лучшие математические умы вот уже более 150 лет. Но вот наконец 18 апреля 2002 года румынский математик Преда Михайлеску представил полное доказательство гипотезы. Оно было опубликовано в 2004 году и на сегодня полностью принято математическим сообществом. И снова можно задаться вопросом: когда гипотеза Каталана стала истинной: в 1342 году? В 1844? В 1976? В 2002? В 2004? Разве не очевидно, что это утверждение всегда было истинным, хотя мы не знали, что оно истинно? Именно такого рода утверждения платоники и называют «объективными истинами».

Некоторые математики, философы, специалисты по когнитивной психологии и другие «потребители» математики, например программисты, считают платоновский мир плодом воображения чересчур мечтательных умов (такую точку зрения и другие догмы мы еще обсудим подробнее на страницах этой книги, в главе 9). Более того, в 1940 году знаменитый историк математики Эрик Темпл Белл (1883–1960) сделал вот какое предсказание (Bell 1940).

Согласно пророкам, последний приверженец платоновских идеалов разделит участь динозавров к 2000 году. И тогда к математике, лишившейся мифического покрова этернализма, будут относиться именно как к той науке, какой она была всегда, – к языку, изобретенному людьми с определенной целью, которую они сами себе поставили. Последний храм абсолютной истины исчезнет, а вместе с ним исчезнет и ничто, которое в нем свято оберегали.

Предсказание Белла не сбылось. Хотя в науке и появились догмы, диаметрально противоположные платонизму (правда, противоположные, если можно так выразиться, с разных сторон), им не удалось полностью завоевать умы (и сердца!) всех математиков и философов, и раскол между ними в наши дни остался прежним.

Однако давайте предположим, что в один прекрасный день платонизм победил, и все мы стали убежденными платониками. Объясняет ли платонизм «непостижимую эффективность» математики при описании нашего мира? Не совсем. Почему физическая реальность ведет себя в соответствии с законами, обретающимися в абстрактном платоновском мире? Ведь в этом, в сущности, и состоит одна из загадок Пенроуза, а Пенроуз – убежденный платоник. Так что пока придется нам смириться с фактом, что даже если бы все мы стали сторонниками платонизма, тайна могущества математики осталась бы тайной. По словам Вигнера: «Невольно создается впечатление, что чудо, с которым мы сталкиваемся здесь, не менее удивительно, чем чудо, состоящее в способности человеческого разума нанизывать один за другим тысячи аргументов, не впадая при этом в противоречие».

Чтобы вполне оценить масштабы этого чуда, нам придется углубиться в жизнь и наследие самих чудотворцев – блистательных умов, которым мы обязаны открытием множества неизмеримо точных математических законов природы.

Глава 3

Волшебники: наставник и еретик

Наука, в отличие от десяти заповедей, попала в руки человечества не в виде надписей на внушительных каменных скрижалях. История науки – это история взлетов и падений многочисленных теорий, умозаключений и моделей. Многие идеи, на вид весьма многообещающие, оказались фальстартами или вели в тупик. Многие теории, казавшиеся в свое время незыблемыми, впоследствии разваливались, не пройдя суровых испытаний дальнейших экспериментов и наблюдений, и оказывались забыты навеки. Даже незаурядный ум авторов некоторых концепций не гарантировал, что эти концепции не будут смещены со сцены. Например, великий Аристотель был убежден, что камни, яблоки и прочие тяжелые предметы падают вниз, поскольку ищут свое естественное место, а оно – в центре Земли. Когда эти тела приближаются к Земле, утверждал Аристотель, они ускоряются, поскольку рады вернуться домой. А вот воздух (и огонь) поднимаются вверх, поскольку естественное место воздуха – в небесных сферах. Каждому предмету приписывалась своя природа на основании того, к какой стихии, как считалось, они ближе всего – к земле, огню, воде или воздуху. Как говорил сам Аристотель (Aristotle ca. 330 BCa, b; см. также Koyré 1978).

Из существующих [предметов] одни существуют по природе, другие – в силу иных причин. ... Простые тела, как-то: земля, огонь, воздух, вода – эти и подобные им, говорим мы, существуют по природе. Все упомянутое очевидно отличается от того, что образовано не природой: ведь все существующее по природе имеет в самом себе начало движения и покоя... ... Природа есть некое начало и причина движения и покоя для того, чему она присуща первично, сама по себе... Согласно с природой [ведут себя] и эти [предметы], и все, что присуще им само по себе, например огню нестись вверх... (Пер. В. Карпова.)

Аристотель даже попытался сформулировать количественный закон движения. Он утверждал, что чем тяжелее предмет, тем быстрее он падает, причем его скорость прямо пропорциональна весу (то есть предмет вдвое тяжелее и падать будет со вдвое большей скоростью). Хотя житейский опыт и показывал, что это вполне разумно – ведь и правда кирпич ударяется о пол раньше, чем перышко, если бросить их с одной высоты, – однако Аристотель так и не подверг свое количественное утверждение более тщательной проверке. То ли ему это не приходило в голову, то ли он не считал необходимым проверить, действительно ли два кирпича, связанные вместе, падают вдвое быстрее, чем один кирпич. Галилео Галилей (1564–1642) придавал гораздо больше значения математике и эксперименту, а благополучие падающих яблок и кирпичей не слишком его заботило, и он первым заметил, что Аристотель глубоко заблуждался. При помощи хитроумного мысленного эксперимента Галилею удалось показать, что закон Аристотеля не имеет никакого смысла, поскольку логически непоследователен (Galileo 1589–92). Рассуждал Галилей следующим образом. Предположим, мы свяжем вместе два предмета, один легче, другой тяжелее. С какой скоростью упадет получившийся составной предмет по сравнению с двумя предметами, из которых он состоит? С одной стороны, согласно закону Аристотеля, можно сделать вывод, что упадет он с какой-то средней скоростью, поскольку более легкий предмет задержит падение более тяжелого. С другой, если учесть, что составной предмет на самом деле тяжелее каждой из своих частей, падать он должен даже быстрее, чем более тяжелый из двух компонентов, а это приводит к очевидному противоречию. Перо на Земле падает медленнее кирпича по одной простой причине – из-за сопротивления воздуха: если бы перо и кирпич падали с одной и той же

высоты в вакууме, то коснулись бы пола одновременно. Это показали самые разные эксперименты, самый зрелищный из которых провел Дэвид Рэндольф Скотт, астронавт с «Аполлона-15» и седьмой человек, чья нога ступала на Луну: он одновременно выпустил из одной руки молоток, а из другой перо. Поскольку никакой существенной атмосферы у Луны нет, молоток и перо коснулись поверхности одновременно.

Но самое удивительное в ошибочном законе Аристотеля не то, что он неправильный, а то, что в нем за две тысячи лет никто не усомнился. Как удалось очевидно неверной идее достичь такого примечательного долголетия? Перед нами пример «идеального шторма» – уникального стечения неблагоприятных обстоятельств: совокупное действие трех сил обеспечило создание незыблемой догмы. Во-первых, налицо простой факт: в отсутствие точных средств измерения закон Аристотеля вроде бы соответствует жизненному опыту: листы папируса и правда парили в воздухе, а куски свинца – нет. Нужен был гений Галилея, чтобы заявить, что жизненный опыт и здравый смысл могут наталкивать на неверные выводы. Во-вторых, надо учесть, каким колоссальным весом обладала практически непревзойденная репутация и авторитет Аристотеля как ученого. Ведь именно он и не кто иной заложил основы западной интеллектуальной культуры. Аристотель буквально сказал все обо всем – будь то исследование всех природных явлений или фундамент этики, метафизики, политики и искусства. Мало того – Аристотель в некотором смысле научил нас, как именно следует думать, поскольку первым начал исследовать формальную логику. Сегодня с революционной и, можно сказать, совершенной системой логических выводов – силлогизмов – Аристотеля знаком, наверное, каждый школьник.

1. Всякий грек – человек.
2. Всякий человек смертен.
3. Следовательно, всякий грек смертен.

(Подробнее о таких логических конструкциях мы поговорим в главе 7.)

Третья причина невероятной жизнестойкости ошибочной теории Аристотеля заключается в том, что христианская церковь включила ее в свою систему догматов. А это надежно защищало предположения Аристотеля от любых попыток их оспорить.

Несмотря на значительный вклад в систематизацию дедуктивной логики, Аристотеля чтят не за достижения в математике. Пожалуй, достойно удивления, что человек, который, в сущности, основал науку, поскольку догадался, что к ней нужен систематический подход, так мало думал о математике (гораздо меньше Платона) и был настолько не силен в физике. Хотя Аристотель признавал важность численных и геометрических соотношений в науках, математику он по-прежнему считал абстрактной дисциплиной, никак не связанной с физической реальностью. Следовательно, хотя интеллектуальная мощь Аристотеля не подлежит сомнению, в мой список «математиков-волшебников» он *не входит*.

«Волшебниками» я буду называть тех уникалов, которые способны вытаскивать кроликов из буквально пустых шляп, тех, кто открыл связи между математикой и природой, которые раньше никому не приходили в голову, тех, кто способен наблюдать сложные природные феномены и вычленять из них кристально чистые математические законы. В иных случаях эти мыслители высшего порядка продвигали математику вперед даже благодаря своим наблюдениям и экспериментам. Вопрос о непостижимой эффективности математики при объяснении природных явлений и не возник бы, если бы не подобные волшебники. Загадка могущества математики прямо и непосредственно порождена чудесными озарениями этих исследователей.

Чтобы воздать должное всем великолепным физикам и математикам, благодаря которым сформировалась наша картина мироздания, одной книги не хватит. В этой и следующей главе я расскажу лишь о четырех титанах минувших веков – о научных звездах самой что ни на есть первой величины, которых без малейших сомнений можно назвать волшебниками.

Первый волшебник в моем списке запомнился человечеству довольно странным поступком: он пробежал по улицам родного города в чем мать родила.

Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю

Когда историк математики Эрик Темпл Белл был вынужден принять решение, кого включить в число трех своих любимых математиков, то пришел к следующему выводу.

В любой список трех «величайших» математиков в истории обязательно вошел бы Архимед. Остальные два имени, которые обычно ставят в один ряд с Архимедом, – это Ньютон (1642–1727) и Гаусс (1777–1855). Если же принять в расчет относительное богатство – или бедность – математики и естествознания в соответствующие исторические периоды, когда жили эти титаны, и оценить их достижения в контексте того времени, многие, пожалуй, отдадут пальму первенства Архимеду.

Архимед (287–212 гг. до н. э.; на рис. 10 приведен бюст, который считают портретом Архимеда, но на самом деле это, вероятно, бюст какого-то спартанского царя) и в самом деле был Ньютоном и Гауссом своего времени – и отличался таким блестящим умом, живым воображением и поразительной интуицией, что и современники, и последующие поколения произносили его имя с почтением и благоговением. И хотя Архимед больше известен инженерными изобретениями, прежде всего он был математиком, и как математик он опередил свое время на века. К сожалению, о детстве и юности Архимеда и о его семье нам почти ничего не известно. Первую его биографию написал некто Гераклид, до нас она не дошла, и то небольшое, что нам известно о его жизни и гибели, восходит к сочинениям римского историка Плутарха²¹. А Плутарх (ок. 46–120) больше интересовался победами римского военачальника Марцелла, который в 212 году до н. э. завоевал город Сиракузы, где жил Архимед (Plutarch ок. 75). К счастью для истории математики, Архимед во время осады Сиракуз доставил Марцеллу столько хлопот, что три величайших историка того времени – Плутарх, Полибий и Тит Ливий – не могли его не упомянуть.

²¹ Это упомянуто в комментариях математика Евтокия (ок. 480–540) к сочинению Архимеда «Измерение круга»; см. Heiberg 1910–15.

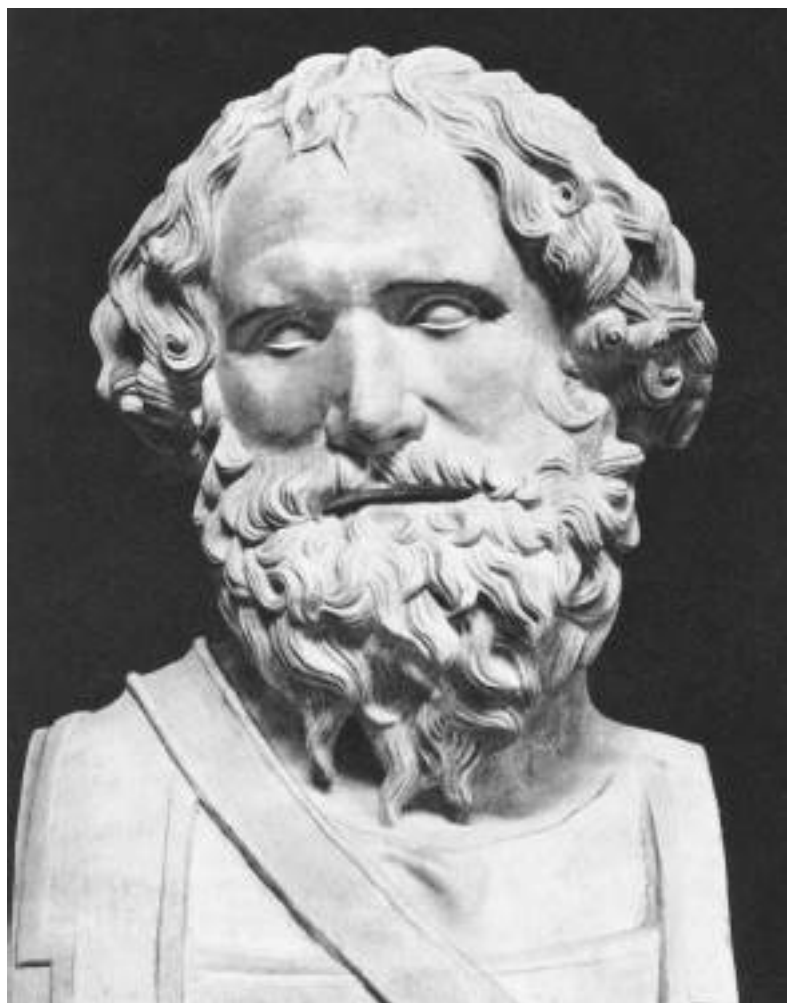


Рис. 10

Архимед родился в Сиракузах – в то время это была греческая колония на Сицилии²². По его собственным словам, он был сын астронома Фидия, о котором почти ничего не известно, кроме того, что он оценил соотношение диаметров Солнца и Луны. Вероятно, Архимед был в каком-то родстве и с царем Гиероном II, который и сам был незаконнорожденным сыном одного аристократа (от рабыни-наложницы). Какие бы узы ни связывали Архимеда с царским родом, и сам Гиерон, и его сын Гелон относились к ученому с большим уважением. В юности Архимед прожил некоторое время в Александрии (свидетельства об этом обсуждаются в Dijksterhuis 1957), где изучал математику, а затем вернулся в Сиракузы и посвятил свою жизнь научным изысканиям в разных областях знания.

Архимед был математиком из математиков. Согласно Плутарху, он, «считая сооружение машин и вообще всякое искусство, сопричастное повседневному нуждам, низменным и грубым, все свое рвение обратил на такие занятия, в которых красота и совершенство пребывают не смешанными с потребностями жизни» (*здесь и далее пер. С. Маркиша*). Увлечение абстрактной математикой и поглощенность ею выходили далеко за рамки восторга, с которым относились к этой науке другие ученые. Вернемся к Плутарху.

И нельзя не верить рассказам, будто он был тайно очарован некоей сиреной, не покидавшей его ни на миг, а потому забывал о пище и об уходе за телом, и его нередко силой приходилось тащить мыться и умащаться, но

²² Год рождения Архимеда определен на основании «Хилиад» византийского автора XII века Иоанна Цеца.

и в бане он продолжал чертить геометрические фигуры на золе очага и даже на собственном теле, натертом маслом, проводил пальцем какие-то линии – поистине вдохновленный Музами, весь во власти великого наслаждения.

При всем презрении к прикладной математике и пренебрежении, с каким сам Архимед относился к собственным инженерным идеям, поразительные изобретения стяжали ему даже большую славу, чем математический гений.

Самая известная легенда об Архимеде лишь дополняет образ типичного рассеянного математика. Эту забавную историю первым рассказал римский архитектор Витрувий в I веке до н. э. Царь Гиерон пожелал посвятить бессмертным богам золотой венец. Когда венец доставили царю, вес его равнялся весу золота, выделенного на его создание. Тем не менее царь заподозрил, что некоторое количество золота заменили серебром того же веса. Поскольку сам он не мог обосновать свои подозрения, то обратился за советом к великому математику Архимеду. Легенда гласит, что в один прекрасный день Архимед улегся в ванну, поглощенный размышлениями, как же разоблачить мошенничество с венцом. И вот, погрузившись в воду, он вдруг понял, что его тело вытесняет определенный объем воды – вода выплеснулась за край ванны. И у него мгновенно созрело решение²³. Архимед вне себя от радости выскочил из ванны и нагим пробежал по улицам города с криком: «Эврика, эврика!» («Я нашел, я нашел!»)

Другое известное высказывание Архимеда – «Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю» – в наши дни в той или иной форме цитируется более чем на 150 000 веб-страниц, согласно поисковику «Google». Это смелое заявление, похожее на девиз крупной корпорации, приводили и Томас Джефферсон, и Марк Твен, и Джон Кеннеди, оно встречается даже в поэме лорда Байрона²⁴. Архимед много занимался исследованием задачи о перемещении тела заданного веса с помощью заданной силы, и его крылатая фраза, очевидно, знаменует кульминацию этих изысканий. Плутарх рассказывает, что царь Гиерон потребовал, чтобы Архимед продемонстрировал свою способность манипулировать тяжелым грузом при помощи малой силы, и тогда Архимед, задействовав составной блок, спустил на воду судно с полным грузом. Плутарх восхищенно добавляет, что корабль шел «так медленно и ровно, точно... плыл по морю». Эту же легенду с незначительными вариациями мы встречаем и в других источниках. Конечно, Архимед едва ли сумел и в самом деле передвинуть целый корабль при помощи доступных в то время механических устройств, однако легенды не оставляют места для сомнений, что ученый и вправду устроил эффектную демонстрацию какого-то изобретения, позволявшего перемещать тяжелые грузы.

Архимеду принадлежит множество других мирных изобретений – например, гидравлический винт для подъема воды и планетарий, где показывалось движение небесных тел, – однако в древности он больше всего славился своей ролью в обороне Сиракуз от римских завоевателей.

Историки всегда любили войны. Именно поэтому события, связанные с осадой Сиракуз римскими войсками в 214–212 гг. до н. э. подробнейшим образом описаны в трудах целого ряда историков. Римский военачальник Марк Клавдий Марцелл (ок. 268–208 гг. до

²³ Римский архитектор Марк Витрувий Поллион (I в. до н. э.) приводит этот анекдот в своем трактате «De Architectura» (Vitruvius I century BC.) Он пишет, что Архимед погрузил в воду слиток золота и слиток серебра – оба точно такого же веса, что и венец. Таким образом, он обнаружил, что венец вытесняет больше воды, чем золото, но меньше, чем серебро. Легко показать, что разница объемов вытесненной воды позволяет рассчитать соотношение веса золота и серебра в венце. То есть, вопреки некоторым распространенным версиям легенды, Архимеду не пришлось прибегать при решении задачи о венце к законам гидростатики.

²⁴ Томас Джефферсон в письме Жозе Коррея да Серра в 1814 году писал: «Хорошее мнение общества, подобно рычагу Архимеда, движет миром, стоит лишь найти верную точку опоры». Лорд Байрон упоминает об утверждении Архимеда в «Дон-Жуане». Кеннеди вставил эту фразу в свою предвыборную речь, которая цитировалась в «Нью-Йорк Таймс» 3 ноября 1960 года. Марк Твен приводит ее в статье «Архимед» (1887).

н. э.), к тому времени стяжавший себе изрядную славу, предвкушал скорую победу. Однако он, очевидно, не принял в расчет упрямства царя Гиерона, которому к тому же помогал гений математики и инженерного дела. Плутарх живо и ярко описывает, какой хаос посеяли в рядах римских воинов боевые машины Архимеда.

Но тут Архимед пустил в ход свои машины, и в неприятеля, наступающего с суши, понеслись всевозможных размеров стрелы и огромные каменные глыбы, летевшие с невероятным шумом и чудовищной скоростью, – они сокрушали всё и всех на своем пути и приводили в расстройство боевые ряды, – а на вражеские суда вдруг стали опускаться укрепленные на стенах брусья и либо топили их силою толчка, либо, схватив железными руками или клювами вроде журавлиных, вытаскивали носом вверх из воды, а потом, кормою вперед, пускали ко дну либо, наконец, приведенные в круговое движение скрытыми внутри оттяжными канатами, увлекали за собою корабль и, раскрутив его, швыряли на скалы и утесы у подножия стены, а моряки погибали мучительной смертью. Нередко взору открывалось ужасное зрелище: поднятый высоко над морем корабль раскачивался в разные стороны до тех пор, пока все до последнего человека не оказывались сброшенными за борт или разнесенными в клочья, а опустевшее судно разбивалось о стену или снова падало на воду, когда железные челюсти разжимались.

Архимедовы изобретения вселяли такой ужас, что «римляне... едва заметив на стене веревку или кусок дерева... поднимают отчаянный крик и пускаются наутек в полной уверенности, будто Архимед наводит на них какую-то машину». Эти механизмы произвели сильнейшее впечатление и на самого Марцелла, который сказал своим военным инженерам: «Не довольно ли нам воевать с этим Бриареем [сторукиим великаном, сыном Урана и Геи] от геометрии, который вычерпывает из моря наши суда, а потом с позором швыряет их прочь и превзошел сказочных сторуких великанов – столько снарядов он в нас мечет!»

Согласно другой популярной легенде, которая впервые изложена в трудах великого греческого врача Галена (ок. 129–200), Архимед при помощи системы зеркал фокусировал солнечные лучи и жег римские корабли.²⁵

²⁵ В октябре 2005 года группа студентов Массачусетского технологического института попыталась воспроизвести эту установку и сжечь корабль при помощи зеркал. Результаты оказались неубедительными: студенты сумели поддержать огонь на загоревшемся участке, но крупный пожар устроить не удалось. Похожий эксперимент, проведенный в Германии в сентябре 2002 года, показал, что поджечь корабельный парус при помощи 500 зеркал в принципе возможно. Подробнее о поджигательных зеркалах можно прочитать на сайте Михаэля Лаханаса <http://www.mlahanas.de/>.



Рис. 11

Эту фантастическую историю пересказывают и византийский зодчий VI века Анфимий из Тралл, и сразу несколько историков XII века, хотя неясно, возможно ли такое на практике. И все же собрание полулегенд-полусказок об Архимеде дает нам достаточно свидетельств того, с каким благоговением к этому «мудрецу» относились поколения потомков.

Как я уже отмечал, сам Архимед, высокочтимый «Бриарей от геометрии», не слишком ценил свои военные игрушки и в основном считал их отступлениями от главного – геометрической науки. К несчастью, эта надменность в конце концов стоила Архимеду жизни. Когда римляне все же захватили Сиракузы, Архимед был так поглощен геометрическими чертежами на подносе с песком, что даже не заметил, что кругом кипит бой. Согласно некоторым историкам, когда римский воин приказал Архимеду следовать за ним к Марцеллу, старый геометр возмущенно ответил: «Не трогай мои чертежи!» Этот ответ привел воина в такую ярость, что он нарушил приказ командира, выхватил меч и убил величайшего математика древности²⁶. На рис. 11 приведена сделанная в XVIII веке предполагаемая репродукция мозаики, обнаруженной в Геркулануме, на которой запечатлены последние мгновения жизни «наставника».

Гибель Архимеда в некотором смысле знаменовала конец необычайно плодотворной эпохи в истории математики. Вот что отметил английский математик и философ Альфред Норт Уайтхед.

²⁶ Эти слова Архимеда упомянуты в «Хилиадах» Цеца, см. Dijksterhuis 1957. Плутарх просто говорит, что Архимед отказался следовать за воином к Марцеллу, пока не решит задачу, которой был поглощен (Plutarch ca. 75 AD).

Гибель Архимеда от рук римского солдата – это символ перемен первой величины в масштабе всего мира. Римляне – великий народ, однако их проклятием стала выхолощенность, прислужница практичности. Они не были мечтателями – и не могли потому встать на иную точку зрения, что могло бы дать им более фундаментальную власть над силами природы. Ни один римлянин не поплатился жизнью за то, что был поглощен созерцанием математического чертежа.

К счастью, несмотря на скудость сведений о жизни Архимеда, до нас дошли многие (правда, не все) его поразительные сочинения. Архимед имел обыкновение писать о своих математических открытиях в письмах нескольким друзьям-математикам или уважаемым людям. В список его корреспондентов, помимо всех прочих, входили и астроном Конон Самосский, математик Эратосфен Киренский и царевич Гелон. После смерти Конона Архимед послал несколько писем его ученику Досифею Пелузийскому. Труды Архимеда касаются самых разных вопросов математики и физики²⁷. Вот лишь немногие из его великих достижений. Он разработал общий метод вычисления площадей самых разных плоских фигур и объема пространств, ограниченных самыми разными кривыми поверхностями. В их число входили площадь круга, сегментов параболы и спирали и объемы сегментов цилиндров, конусов и других тел, полученных путем вращения парабол, эллипсов и гипербол. Он доказал, что число π , отношение длины окружности к ее диаметру, должно быть больше $310/71$ и меньше $31/7$. В те времена, когда еще не существовало методов описания очень больших чисел, Архимед изобрел систему, позволявшую не просто записывать числа любой величины, но и манипулировать ими. В физике Архимед открыл законы, управляющие плаванием тел, таким образом заложив основы современной гидростатики. Кроме того, он определил центры тяжести многих объемных тел и сформулировал законы механики рычагов. Архимед проводил астрономические наблюдения, чтобы определять продолжительность года и расстояния до планет.

Оригинальность мышления и внимание к мелочам характерны для трудов многих греческих математиков. И, тем не менее, методы рассуждений и поиска решения, которые разработал Архимед, выделяют его из рядов всех ученых того времени. Приведу лишь три показательных примера, дающие возможность оценить масштабы изобретательности Архимеда. Один на первый взгляд кажется всего лишь забавным курьезом, однако при более пристальном рассмотрении показывает всю глубину пытливого ума Архимеда. Остальные два примера показывают, насколько методы Архимеда опережали время – вот почему я считаю, что именно они возвышают Архимеда до положения «волшебника».

Судя по всему, Архимед очень увлекался большими числами. Однако очень большие числа неудобно записывать обычным способом, они слишком громоздки (попробуйте хотя бы выписать чек на 8,4 триллиона долларов, национальный долг США на июнь 2006 года, и втиснуть это число в строчку, выделенную под сумму). Поэтому Архимед разработал систему, позволявшую записывать числа длиной до 80 000 триллионов знаков. Затем он применил эту систему в оригинальном трактате под названием «Псаммит» («Исчисление песчинок»), где доказал, что общее количество песчинок в мире не бесконечно.

Даже введение в трактат столь гениально, что я приведу здесь отрывок из него (все сочинение посвящено Гелону, сыну царя Гиерона II) (Heath 1897).

Государь Гелон!

²⁷ Прекрасная книга о трудах Архимеда – «The Works of Archimedes» (Heath 1897). Кроме того, великолепные обзоры приведены в Dijksterhuis 1957 и Hawking 2005.

Есть люди, думающие, что число песчинок бесконечно. Я не говорю о песке в окрестности Сиракуз и других местах Сицилии, но о всем его количестве как в странах населенных, так и необитаемых.

Другие думают, что хотя число это и не бесконечно, но большего представить себе невозможно.

Если бы эти последние вообразили массу песка в объеме земного шара, причем им были бы наполнены все моря и пропасти до вершин высочайших гор, то, конечно, они еще меньше могли бы поверить, что легко назвать число, его превосходящее.

Я, напротив, постараюсь доказать с геометрической точностью, которая убедит тебя, что между числами, упоминаемыми мной в книге, написанной Зевксиппу [к сожалению, она утрачена], есть числа, превышающие число песчинок, которые можно вместить не только в пространстве, равном объему Земли, наполненной указанным выше способом, но и целого мира.

Ты знаешь, что, по представлению некоторых астрономов, мир имеет вид шара, центр которого совпадает с центром Земли, а радиус равен длине прямой, соединяющей центры Земли и Солнца.

Но Аристарх Самосский в своих «Предложениях», написанных им против астрономов, отвергая это представление, приходит к заключению, что мир гораздо больших размеров, чем только что указано.

Он полагает, что неподвижные звезды и солнце не меняют своего места в пространстве, что Земля движется по окружности около Солнца, находящегося в ее центре, и что центр шара неподвижных звезд совпадает с центром Солнца, а размер этого шара таков, что окружность, описываемая, по его предположению, Землей, находится к расстоянию неподвижных звезд в таком же отношении, в каком центр шара находится к его поверхности (*здесь и далее пер. Г. Попова*).

Из этого введения тут же следует два вывода: (1) Архимед был готов оспорить даже самые популярные представления (вроде бесконечности числа песчинок) и (2) он с уважением относился к гелиоцентрической модели астронома Аристарха (правда, далее в трактате он уточнил одну из гипотез Аристарха). Во Вселенной Аристарха Земля и планеты вращались вокруг неподвижного Солнца, находящегося в ее центре (вспомним, что эту модель предложили за 1800 лет до Коперника!). После этих предварительных замечаний Архимед вплотную приступает к решению задачи о песчинках и делает для этого несколько последовательных логических шагов. Сначала он оценивает, сколько песчинок нужно положить в ряд, чтобы получился диаметр макового зернышка. Затем подсчитывает, сколько нужно маковых зернышек, чтобы выложить отрезок, равный толщине пальца, сколько пальцев составляют стадий (около 178 метров), а затем подсчитывает количество песчинок на десять миллиардов стадиев. По ходу дела Архимед изобретает систему обозначений и индексов, которые в сочетании позволяют ему классифицировать эти исполинские числа. Поскольку Архимед предположил, что сфера неподвижных звезд менее чем в десять миллионов раз больше сферы, в которую вписана орбита Солнца (как она видится с Земли), то обнаружил, что количество песчинок во Вселенной, набитой песком, меньше 1063 (единицы с 63 нулями). В заключение трактата он почтительно обращается к Гелону.

Государь! Сказанное мною покажется, конечно, невероятным многим из тех, кто не изучал математики, но будет достоверно, потому что доказано, для тех, кто ею занимался, если внимательно рассмотреть все сказанное

мною о расстояниях и величине Земли, Солнца, Луны и всей Вселенной. Впрочем, я со своей стороны нахожу, что было бы полезно, если бы и другие расследовали этот предмет еще обстоятельнее.

Красота «Исчисления песчинок» заключается в той легкости, с какой Архимед переходит от повседневных предметов (маковых зернышек, песчинок, пальцев) к абстрактным числам и системе математических обозначений – а затем обратно к размерам Солнечной системы и Вселенной в целом. Очевидно, что Архимед обладал столь гибким умом, что безо всяких затруднений применял свою математику для открытия неизвестных свойств Вселенной, а свойства космоса – для развития арифметических концепций.

Вторая причина, по которой Архимед достоин звания волшебника, – метод, при помощи которого он формулировал и доказывал свои выдающиеся геометрические теоремы. До XX столетия об этом методе не было известно почти ничего, как и о мыслительном процессе Архимеда в целом. Свои соображения он излагает так сжато, что не оставляет практически никаких зацепок. А затем, в 1906 году, было сделано эпохальное открытие, позволившее разобраться, как был устроен разум этого гения. История открытия так похожа на исторические детективы итальянского писателя Умберто Эко, что я просто обязан вкратце изложить этот сюжет.²⁸

²⁸ Чудесное описание истории проекта «Палимпсест» дано в Netz and Noel 2007.

Палимпсест Архимеда

В какой-то момент в X веке (вероятно, в 975 году) некий безымянный писец переписал в Константинополе (ныне Стамбул) три важнейшие работы Архимеда – «Метод механических теорем», «Стомахион» и «О плавающих телах». Вероятно, это был результат общего интереса к греческой математике, который вспыхнул во многом благодаря византийскому ученому Льву Математику, жившему в IX веке. Однако в 1204 году участники Четвертого крестового похода соблазнились обещаниями награды и разграбили Константинополь. В последующие годы страсть к математике угасла, а раскол между западной католической церковью и восточной православной стал окончательным и бесповоротным. В какой-то момент до 1229 года манускрипт с работами Архимеда подвергся катастрофической переработке: рукопись разделили на отдельные листы пергамента и смыли все написанное, чтобы использовать его для христианской литургической книги. Писец по имени Иоанн Мирон завершил работу над литургической книгой 14 апреля 1229 года (Netz and Noel 2007). К счастью, в результате отмыwania оригинальный текст не исчез бесследно. На рис. 12 приведена страница из манускрипта: горизонтальные линии – это текст молитв, а еле заметные вертикальные – математические трактаты Архимеда. К XVII веку палимпсест – переписанный документ – попал каким-то образом в Святую Землю, в монастырь Св. Саввы близ Вифлеема. В начале XIX века в библиотеке монастыря хранилось не меньше тысячи манускриптов. И все же по не вполне понятным причинам палимпсест Архимеда вернули в Константинополь. Затем, в 1840-е годы, подворье Иерусалимского храма Гроба Господня в Константинополе посетил знаменитый немецкий библиист Константин Тишендорф (1815–1874), первооткрыватель одного из самых ранних списков Библии, – и увидел там этот палимпсест. Судя по всему, Тишендорфу показалось, что еле заметный математический текст представляет определенный интерес, поскольку он оторвал и выкрал один лист манускрипта. В 1879 году наследники Тишендорфа продали эту страницу библиотеке Кембриджского университета.

В 1899 году греческий ученый А. Пападопулос-Керамеус составил каталог всех манускриптов, хранившихся в подворье, и рукопись Архимеда значится в его каталоге как Ms. 355. Пападопулос-Керамеус сумел прочитать несколько строчек математического текста и привел их в каталоге, понимая, вероятно, что это может быть очень важное открытие. Это был поворотный момент в саге о манускрипте. Математический текст в каталоге привлек внимание датского филолога Йохана Людвига Гейберга (1854–1928). Гейберг понял, что текст принадлежит Архимеду, и в 1906 году приехал в Стамбул, изучил и сфотографировал палимпсест, а год спустя объявил о сенсационном открытии: в рукописи содержались два неизвестных ранее трактата Архимеда и один дошедший до нас лишь в латинском переводе. Но хотя Гейберг сумел прочитать и впоследствии опубликовал отрывки из манускрипта в своей книге о трудах Архимеда, остались большие пробелы. К несчастью, в какой-то момент после 1908 года манускрипт исчез из Стамбула при загадочных обстоятельствах – а когда всплыл снова, оказалось, что им владеет некое парижское семейство, которое утверждает, что приобрело его еще в 20-е годы. Палимпсест хранили в неподходящих условиях, и он был местами непоправимо поврежден плесенью, а три страницы, которые ранее перевел Гейберг, и вовсе пропали. Мало того, после 1929 года кто-то нарисовал на четырех страницах четыре миниатюры в византийском стиле. Впоследствии это французское семейство продало манускрипт владельцам аукциона «Кристи». Вопрос о праве собственности на манускрипт разбирался в 1998 году в нью-йоркском суде. Греческий православный патриархат Иерусалима заявил, что рукопись в 20-е годы похитили из одного из его монастырей, однако судья вынесла решение в пользу аукциона «Кристи». Вскоре после этого, 29 октября 1998 года, манускрипт был продан на аукционе «Кристи»; покупатель, пожелавший остаться неизвест-

ным, заплатил за него 2 миллиона долларов. Новый владелец поместил манускрипт в Художественный музей Уолтерса в Балтиморе, где рукопись подвергли интенсивной консервации и тщательному исследованию. В арсенале современных ученых появились инструменты по распознаванию изображений, недоступные исследователям прошлого.

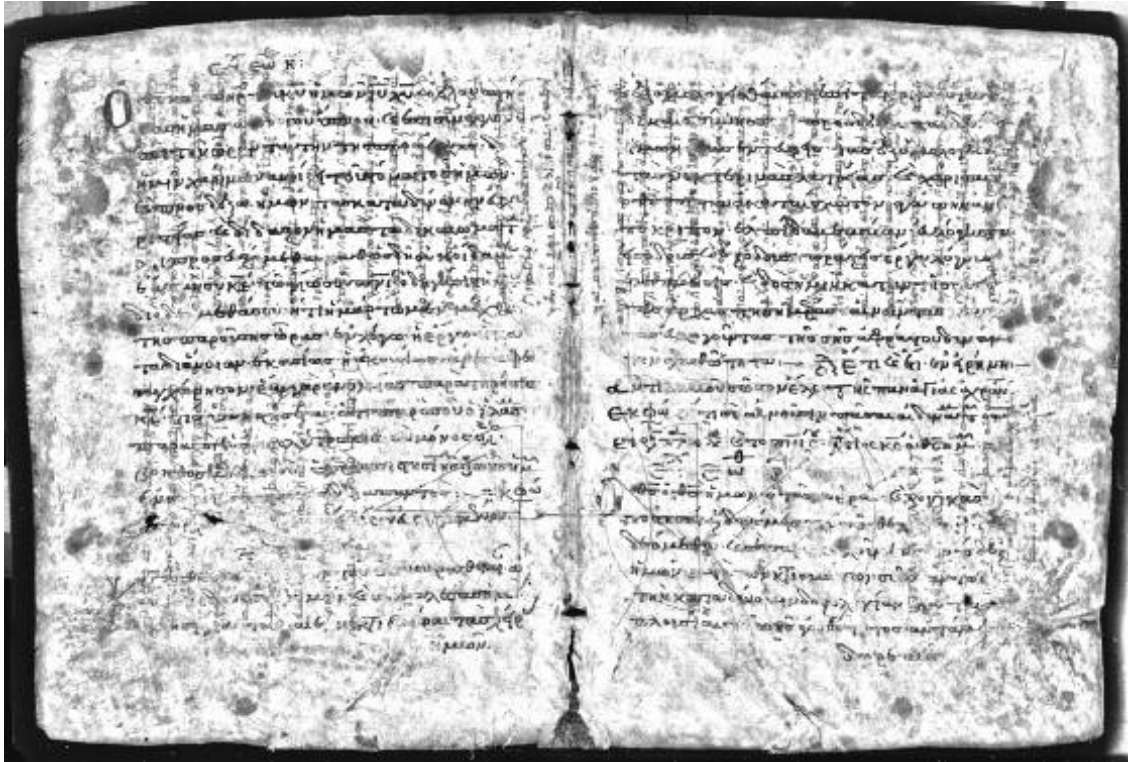


Рис. 12



Рис. 13

Ультрафиолетовый свет, многозональная съемка и даже направленные рентгеновские лучи (ими манускрипт облучали на Стэнфордском линейном ускорителе) уже позволили расшифровать части рукописи, которые раньше были не видны. Сейчас, когда я пишу эти строки, тщательное научное изучение рукописи Архимеда идет полным ходом. Мне выпала честь познакомиться с группой криминалистов, которые изучают палимпсест, и на рис. 13 я стою рядом с экспериментальной установкой, в которой каждую страницу палимпсеста облучают в разных диапазонах.²⁹

Драма вокруг палимпсеста по своим масштабам вполне соответствует значению документа, который наконец-то позволил нам изучить научный метод великого геометра.

²⁹ Уилл Нозл, директор проекта, устроил мне встречу с Уильямом Кристенсом-Барри, Роджером Истоном и Кейт Нокс. Эта группа разработала узкополосную систему построения изображений и придумала алгоритм, при помощи которого можно хотя бы отчасти выявлять текст. Методы обработки изображений разрабатывали также Анна Тонаццини, Луиджи Бедини и Эмануэле Салерно.

Метод

Когда читаешь любой древнегреческий геометрический трактат, невольно восхищаешься лаконичностью стиля и точностью формулировок и доказательств теорем, которым уже более двух тысяч лет.

Но чего в этих книгах точно не найдешь – это объяснений, каким образом эти теоремы пришли в голову автору. Выдающийся трактат Архимеда «Метод механических теорем» заполняет этот загадочный пробел – там рассказано, как сам Архимед убеждался в истинности некоторых теорем еще до того, как придумывал, как их доказать. Приведу отрывок из его послания математику Эратосфену Киренскому (ок. 276–194 гг. до н. э.) во введении к трактату (Dijksterhuis 1957).

В этой книге я шлю тебе доказательства этих теорем. Поскольку, как я уже упоминал, я знаю, что ты человек усердный, прекрасный учитель философии и очень интересуешься любыми математическими исследованиями, какие только ни попадутся тебе, я решил, что будет полезно описать и передать тебе в этой же книге некий особый метод, который даст тебе возможность ставить определенные математические вопросы *при помощи механики* (курсив мой. – М. Л.). Я уверен, что этот же метод не менее полезен при поиске доказательств тех же теорем. В некоторых случаях мне сначала становилось понятно, что происходит, благодаря механическому методу, а затем уже это было доказано геометрически, поскольку изучение этих случаев вышеуказанным методом не позволяет вывести настоящее доказательство. Ведь гораздо проще предоставить доказательство, когда мы уже получили определенные знания посредством указанного метода, чем найти его безо всяких знаний.

Архимед затрагивает здесь один из важнейших принципов научного и математического исследования в целом: зачастую гораздо труднее формулировать вопросы и теоремы, которые стоит исследовать, чем искать ответы на известные вопросы и доказательства известных теорем. Так как же Архимед находил новые теоремы? Опираясь на тончайшее понимание механики, равновесия и принципов рычага, он мысленно взвешивал тела и фигуры, чьи площади и объемы пытался найти, и сравнивал их вес с весом уже известных тел и фигур. А когда ему удавалось таким образом найти неизвестную площадь или объем, было уже гораздо легче геометрически доказать истинность ответа. Именно поэтому «Метод» начинается с ряда утверждений относительно центров тяжести и лишь затем переходит к геометрическим предположениям и их доказательствам.

Метод Архимеда не имеет себе равных по двум причинам. Во-первых, Архимед, в сущности, ввел понятие *мысленного эксперимента* в строгих научных исследованиях. Название этому инструменту, воображаемому опыту, проводимому вместо реального, – *Gedankenexperiment*, то есть «опыт, производимый в мыслях» (нем.) – дал физик Ханс Кристиан Эрстед, живший в XIX веке. В физике, где эта идея оказалась крайне плодотворной, мысленные эксперименты применяются либо для того, чтобы обеспечить понимание процессов еще до экспериментов реальных, либо в случаях, когда реальные эксперименты невозможны. Во-вторых – и это самое главное – Архимед освободил математику от нескольких искусственных ограничений, которые наложили на нее Евклид и Платон. По мнению этих ученых мужей, математикой можно заниматься одним и только одним способом. Надо начинать с аксиом, а затем выстраивать несокрушимую последовательность логических шагов при помощи строго определенных инструментов. Однако вольнолюбивый Архи-

мед решил для постановки и решения новых задач задействовать весь мыслимый арсенал. И не остановился перед тем, чтобы ради развития математики изучать и использовать связи между абстрактными математическими объектами (платоновскими формами) и физической реальностью (реальными телами или плоскими фигурами). И последний пример, подкрепляющий статус Архимеда-волшебника, – его предсказание интегрального и дифференциального исчисления, отрасли математики, которую формально разработал Ньютон (и независимо от него немецкий математик Лейбниц) лишь к концу XVII века³⁰

Основная идея процесса *интегрирования* довольно проста (если ее понятно объяснить, конечно). Предположим, вам нужно найти площадь сегмента эллипса. Можете разделить эту площадь на много маленьких прямоугольников одинаковой ширины и сложить площади этих прямоугольников (рис. 14). Очевидно, что чем больше прямоугольников мы сделаем, тем ближе сумма их площадей будет к истинной площади сегмента. Иначе говоря, на самом деле площадь сегмента равна пределу, к которому стремится сумма прямоугольников, если их число увеличивается до бесконечности. Поиск этого предела и называется интегрированием. Архимед применял вариант вышеописанного метода для поиска объема и площади поверхности сферы, конуса, эллипсоидов и параболоидов (тел, которые получаются, если вращать эллипсы или параболы вокруг оси).

Среди основных задач *дифференциального исчисления* – поиск угла наклона касательной к данной кривой в данной точке, то есть той линии, которая касается кривой только в этой точке. Архимед решил эту задачу для частного случая спирали, тем самым предвосхитив далекое будущее – работы Ньютона и Лейбница. Сегодня области дифференциального и интегрального исчисления и их дочерние отрасли закладывают основу большинства математических моделей – будь то физика, инженерное дело, экономика или динамика популяций.

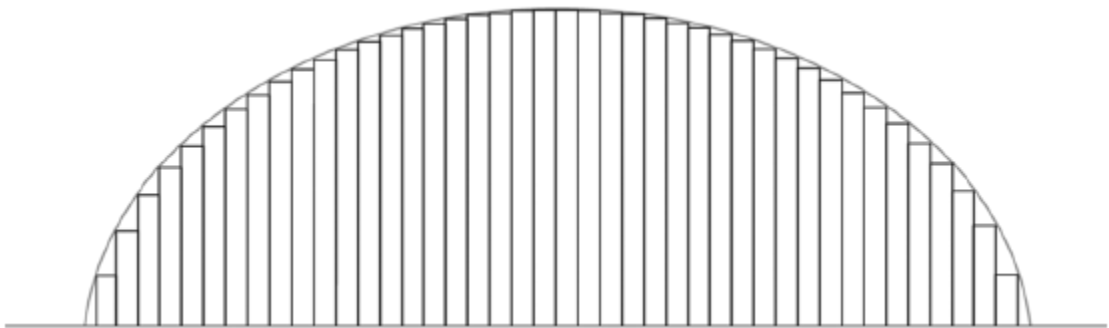


Рис. 14

Архимед изменил мир математики, перевернул представления об отношениях математики с мирозданием. Поскольку у него были как теоретические, так и практические интересы – поразительное сочетание! – он самой своей деятельностью предоставил первые не мифологические, а эмпирические доказательства того, что структура мироздания, очевидно, основана на математике. Идея, что математика – это язык Вселенной, а следовательно, Бог – математик, родилась именно в трудах Архимеда. И все же одного Архимед не сделал – он никогда не говорил об ограниченности применения своих математических моделей в реальных физических обстоятельствах. Например, теоретические рассуждения о рычагах в его трактатах предполагают, что опоры бесконечно твердые, а сами рычаги ничего не весят. Тем самым Архимед в некотором смысле открыл дорогу толкованию математических моделей «с соблюдением внешних приличий». То есть получалось, что математические модели

³⁰ Прекрасный рассказ об истории и значении интегрального и дифференциального исчисления см. у Berlinski 1996.

отражают лишь то, что наблюдают люди, а не описывают подлинную физическую реальность. Разницу между математическим моделированием и физическим объяснением применительно к движению небесных тел первым подробно описал греческий математик Гемин (ок. 10 г. до н. э. – 60 г. н. э.) [Heath 1921]. Он провел грань между астрономами (или математиками), которые, по его мнению, лишь предлагали модели, которые *повторяли бы* наблюдаемое в небесах движение, и физиками, которые должны были искать *объяснения* реальному движению. Именно этому разграничению предстояло достигнуть пика во времена Галилея, о чем мы еще поговорим в этой главе.

Сам Архимед, как ни странно, считал своим важнейшим достижением открытие, что объем сферы, вписанной в цилиндр (рис. 15), всегда составляет ровно $2/3$ объема цилиндра, если его высота равна его диаметру. Архимед так гордился этим результатом, что потребовал, чтобы его высекли на его надгробии (Plutarch ca. 75 AD). Примерно через 137 лет после смерти Архимеда знаменитый римский оратор Марк Туллий Цицерон (ок. 106–43 гг. до н. э.) обнаружил могилу великого математика. Вот как сам Цицерон описывал это событие – довольно трогательно³¹:

Когда я был квестором, я отыскал в Сиракузах его [Архимеда] могилу, со всех сторон заросшую терновником, словно изгородью, потому что сиракузяне совсем забыли о ней, словно ее и нет. Я знал несколько стишков, сочиненных для его надгробного памятника, где упоминается, что на вершине его поставлены шар и цилиндр. И вот, осматривая местность близ Акрагантских ворот, где очень много гробниц и могил, я заметил маленькую колонну, чуть-чуть возвышавшуюся из зарослей, на которой были очертания шара и цилиндра. Тотчас я сказал сиракузянам – со мной были первейшие граждане города, – что этого-то, видимо, я и ищу. Они послали косарей и расчистили место. Когда доступ к нему открылся, мы подошли к основанию памятника. Там была и надпись, но концы ее строчек стерлись от времени почти наполовину. Вот до какой степени славнейший, а некогда и ученейший греческий город позабыл памятник умнейшему из своих граждан: понадобился человек из Арпина, чтобы напомнить о нем (*пер. М. Гаспарова*).

Описывая величие Архимеда, Цицерон отнюдь не преувеличивал. Более того, я преднамеренно задал такие высокие стандарты для получения титула «волшебника», что для того, чтобы перейти от титана Архимеда к следующему кандидату, мы должны будем перепрыгнуть на целых восемнадцать столетий вперед и лишь тогда найдем фигуру подобной величины. В отличие от Архимеда, который заявил, что сдвинет Землю, этот волшебник утверждал, что Земля уже движется.

³¹ Cicero 1st century BC. Научный анализ текста Цицерона, его структуры, риторических особенностей и символизма см. у Jaeger 2002.

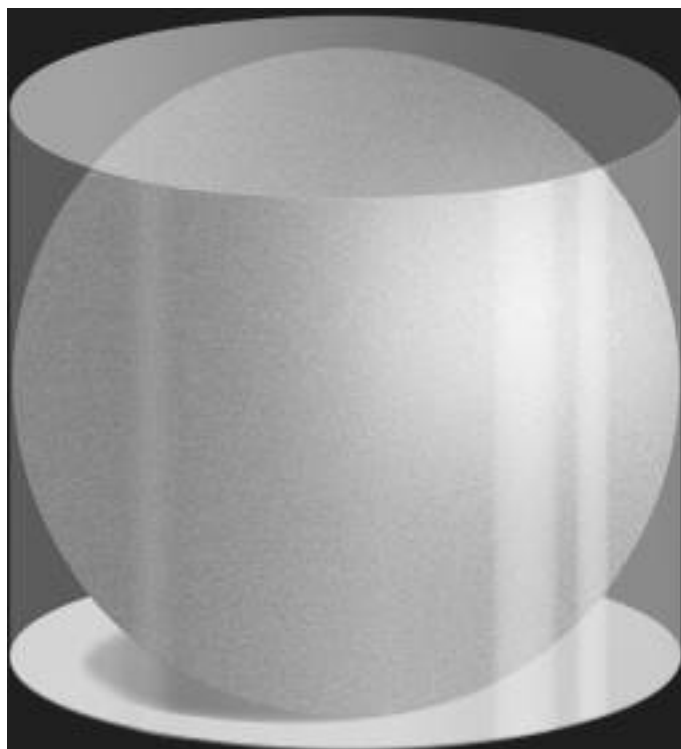


Рис. 15

Лучший ученик Архимеда

Галилео Галилей (рис. 16) родился в Пизе 15 февраля 1564 года³². Его отец Винченцо был музыкантом, а мать Джулия Амманнати отличалась исключительно острым умом, правда, была женщина не очень добрая и не выносила глупости. В 1581 году Галилей по совету отца поступил в Пизанский университет на факультет изящных искусств, чтобы изучать медицину. Однако сразу после поступления интерес к медицине угас, сменившись страстью к математике. Поэтому во время летних каникул в 1583 году Галилей уговорил придворного математика Тосканы Остилио Риччи (1540–1603) побеседовать с его отцом и убедить его, что призвание Галилея – математика. И в ближайшем же будущем вопрос удалось уладить – восторженный юноша был совершенно очарован трудами Архимеда: «Тот, кто прочтет его труды, – писал Галилей, – увидит яснее ясного, насколько все остальные умы проигрывают Архимеду и как мало остается надежды открыть что-то подобное тому, что открыл он»³³.

³² Авторитетная современная биография – S. Drake, «Galileo at Work» (Drake 1978). Более популярное изложение – J. Reston, «Galileo: A Life» (Reston 1994). См. также Van Helden and Burt 1995. Полное собрание сочинений Галилея (на итальянском языке) – Favaro 1890–1909.

³³ Из трактата «La Bilancetta» («Маленькое равновесие»), Galilei 1586



Рис. 16

В то время Галилей и не подозревал, что и сам обладает редчайшим интеллектом, ничем не уступающим уму его греческого наставника. Вдохновленный легендой об Архимеде и золотом венце, Галилей в 1586 году опубликовал небольшой трактат под названием «*La Bilancetta*» («Маленькое равновесие») о гидростатических весах собственного изобретения. Впоследствии он воздал дань наследию Архимеда и в литературоведческой лекции, которую прочитал во Флорентийской академии; тема лекции была несколько необычной — местоположение и размеры Дантова ада по данным «Божественной комедии».

В 1589 году Галилей был назначен заведующим кафедрой математики в Пизанском университете, отчасти благодаря настойчивым рекомендациям Христофора Клавия (1538–1612), авторитетного римского астронома и математика, которого Галилей посетил в 1587 году. Звезда молодого математика явно находилась на подъеме. Следующие три года Галилей посвятил изложению своих первых идей о теории движения. Эти сочинения, несомненно, вдохновленные трудами Архимеда, содержат поразительную смесь интересных идей и ошибочных утверждений. Например, Галилею первому пришло в голову, что проверять теории

относительно падающих тел можно при помощи наклонной плоскости, которая замедляет движение, – однако он ошибочно утверждает, что если сбросить тело с башни, то «древесина в начале движения падает быстрее свинца»³⁴

Направление интересов Галилея и общий ход его мыслительного процесса на этом этапе жизни были несколько неправильно истолкованы его первым биографом Винченцо Вивиани (1622–1703). Вивиани нарисовал популярный образ дотошного упорного экспериментатора, который извлекал новые идеи исключительно из внимательного наблюдения над природными явлениями³⁵. На самом деле до 1592 года, когда Галилей перебрался в Падую, и направление интересов, и методология у него были чисто математическими. Он полагался в основном на мысленные эксперименты и на архимедово описание мира в терминах геометрических фигур, которые подчиняются математическим законам. В те годы главная претензия к Аристотелю у Галилея сводилась к тому, что Аристотель «не подозревал не только о глубоких и достаточно сложных открытиях геометрии, но и о самых элементарных принципах этой науки»³⁶. Также Галилей считал, что Аристотель слишком полагался на чувственный опыт, «поскольку он на первый взгляд дает некоторое подобие истины». Сам же Галилей, напротив, советовал «всегда приводить не примеры, а умозаключения (ибо мы ищем причины следствий, а опыт их не выявляет)».

В 1591 году у Галилея умер отец, и молодой человек, понимая, что теперь он должен содержать семью, принял предложение о работе в Падуе, где ему предложили жалованье втрое больше. Следующие восемнадцать лет были самыми счастливыми в жизни Галилея. Помимо всего прочего, в Падуе он познакомился с Мариной Гамба, с которой у него завязались длительные и прочные отношения; он так и не женился на Марине, однако она родила ему троих детей – Виргинию, Ливию и Винченцо³⁷. Четвертого августа 1597 года Галилей написал личное письмо великому немецкому астроному Иоганну Кеплеру с признанием, что он «уже давно» придерживается идей Коперника, и добавил, что гелиоцентрическая модель Коперника дала ему возможность объяснить целый ряд природных явлений, которые геоцентрическая доктрина не объясняла. Однако Галилей сокрушался по поводу того, что Коперника «высмеяли и зашикали» и тот удалился со сцены. Это письмо знаменовало судьбоносный рубеж – отход Галилея от аристотелевой астрономии; с тех пор раскол становился все глубже. Началось формирование современной астрофизики.

³⁴ Galileo 1589–1592 (Galilei 1600a and Galilei 1600b). Ч. Б. Шмитт предполагает (Schmitt 1969, вслед за D. A. Maklich), что утверждение Галилея может быть результатом того, что рука, держащая свинцовый шар, устает сильнее, чем рука, держащая деревянный шар, а поэтому разжать пальцы и бросить деревянный шар получается быстрее. Прекрасный обзор верных идей Галилея относительно падающих тел приводят Frova and Marenzana 1998 (перевод на английский вышел в 2006 году). Великолепный рассказ о физических воззрениях Галилея можно найти в Koyré 1978.

³⁵ Подробный разбор методов и мыслительного процесса Галилея можно найти в Shea 1972 и в Machamer 1998.

³⁶ Galileo 1589–1592. Галилей выступает со всесторонней критикой Аристотеля в трактате «De Motu». См. Galilei 1600a, b.

³⁷ Биография Виргинии, которая впоследствии была известна как сестра Мария-Селеста, замечательно изложена в книге Dava Sobel, «Galileo's Daughter» (Sobel 1999).

Звездный вестник

Вечером 9 октября 1604 года астрономы в Вероне, Риме и Падуе в изумлении обнаружили новую звезду, которая вскоре засияла так ярко, что затмила все остальные звезды в небе. Метеоролог Ян Бруновский, имперский чиновник из Праги, также видел ее 10 октября и в сильнейшем волнении тут же сообщил о ней Кеплеру. Из-за пасмурной погоды Кеплер смог пронаблюдать звезду только 17 октября, однако, начав наблюдения, тщательно записывал все, что видел, примерно в течение года, а затем, в 1606 году, выпустил книгу о «новой звезде». Сегодня мы знаем, что небесный спектакль, разыгравшийся в 1604 году, знаменовал вовсе не рождение новой звезды, а гибель старой в результате взрыва. Это событие, которое сейчас называется «сверхновой Кеплера», вызвало в Падуе настоящую сенсацию. Галилею удалось пронаблюдать новую звезду своими глазами в конце октября 1604 года, а в декабре и январе он прочитал три публичные лекции, на которые пришло очень много слушателей. Галилей призывал ставить знания выше суеверий и продемонстрировал, что отсутствие наблюдаемого сдвига (*параллакса*) в положении новой звезды (на фоне неподвижных звезд) доказывало, что новая звезда находилась дальше Луны. Значение этого наблюдения трудно преувеличить. В мире Аристотеля любые изменения в небесах были ограничены ближней стороной Луны, а сфера неподвижных звезд, расположенная гораздо дальше, считалась незыблемой и неизменной.

Впрочем, незыблемость этой неизменной сферы была нарушена еще в 1572 году, когда датский астроном Тихо Браге (1546–1601) пронаблюдавал еще один звездный взрыв – теперь это называется «сверхновая Тихо».

Событие 1604 года вбило очередной гвоздь в крышку гроба аристотелевой космологии. Однако подлинный прорыв в понимании Вселенной опирался не на область теоретических умозаключений и не на наблюдения, сделанные невооруженным глазом. Скорее это был результат простых экспериментов с выпуклыми и вогнутыми стеклянными линзами: если правильно подобрать две линзы и держать их на расстоянии около 33 сантиметров друг от друга, далекие предметы покажутся гораздо ближе. К 1608 году подобные подзорные трубы появились по всей Европе, и на соответствующий патент претендовали одновременно один голландский и два фламандских изготовителя очков. Слухи о чудесном инструменте достигли ушей венецианского богослова Паоло Сарпи, который рассказал о нем Галилею примерно в мае 1609 года. Сарпи не терпелось удостовериться, что слухи не пустые, и он навел справки о подзорной трубе в письме своему другу, парижанину Жаку Бадоверу. Галилей, по своим собственным словам, «страстно мечтал об этой прелестной вещице». Впоследствии он описал эти события в трактате «Звездный вестник», который вышел в марте 1610 года³⁸.

Месяцев десять тому назад до наших ушей дошел слух, что некоторый нидерландец приготовил подзорную трубу, при помощи которой зримые предметы, хотя бы удаленные на большое расстояние от глаз наблюдателя, были отчетливо видны как бы вблизи; об его удивительном действии рассказывали некоторые сведущие; им одни верили, другие же их отвергали. Через несколько дней после этого я получил письменное подтверждение от благородного француза Якова Бальдовера из Парижа; это было поводом, что я целиком отдался исследованию причин, а также придумыванию средств, которые позволили бы мне стать изобретателем подобного прибора; немного

³⁸ Galilei 1610 a, b. Прекрасное описание работы над созданием телескопа можно найти в Reeves 2008.

погода, углубившись в теорию преломления, я этого добился. (*Здесь и далее пер. И. Веселовского.*)

Здесь Галилей применяет совершенно такой же творчески-практический метод умозаключений, что и Архимед: как только он узнал, что телескоп в принципе можно построить, у него ушло совсем немного времени на то, чтобы взять и создать этот прибор самостоятельно. Более того, в период с августа 1609 по март 1610 года Галилей с его выдающейся изобретательностью сумел превратить телескоп из устройства, которое увеличивает предметы в восемь раз, в прибор, который сокращает видимое расстояние до них в двадцать раз. Это само по себе значительное техническое достижение, однако величие Галилея должно было проявиться не в практическом «ноу-хау», а в том, как именно он стал применять свою увеличительную трубу (которую он назвал «*perspicillum*»). Галилей не стал ни высматривать далекие корабли из венецианской гавани, ни разглядывать падуанские крыши, а нацелил телескоп в небеса. Последующие события не имели прецедента в истории науки. Как пишет историк Нозл Свердлов³⁹: «За два месяца – декабрь и январь [1609 и 1610 года соответственно] он совершил столько открытий, перевернувших мир, что ни до него, ни после такое никому не удавалось». В честь четырехсотлетней годовщины первых наблюдений Галилея 2009 год был даже назван Международным годом астрономии.

Чем же Галилей заслужил славу корифея науки? Вот лишь несколько из его поразительных достижений.

Направив телескоп на Луну и внимательно изучив так называемый терминатор – линию, разделяющую темную и освещенную части лунного диска – Галилей обнаружил, что поверхность этого небесного тела неровная, на ней есть горы, кратеры и обширные равнины⁴⁰. Он смотрел, как на затянутой тьмой стороне диска возникают яркие пятна света и как эти точки расширяются и распространяются – в точности как свет восходящего солнца на вершинах гор. Он даже определил высоту одной горы, исходя из геометрии освещения, и оказалось, что она больше шести километров. Но и это не все. Галилей увидел, что темная часть Луны (в первой и четвертой четверти) тоже слабо освещена – и сделал вывод, что все дело в отраженном свете с Земли. Галилей утверждал, что не только Земля освещается полной Луной, но и лунная поверхность залита отраженным светом с Земли.

Многие из этих открытий не стали полной неожиданностью, однако данные Галилея были так убедительны, что вывели научные диспуты на абсолютно новый уровень. До Галилея земное и небесное, мирское и божественное были четко разделены. Разница была отнюдь не только научной и философской. На мнимой непохожести Земли и небес был построен мощный корпус мифологии, религии, романтической поэзии и эстетических принципов. А теперь Галилей утверждал нечто совершенно немыслимое. В пике аристотелевой доктрины Галилей рассматривал Землю и небесное тело – Луну – на одинаковых основаниях: у обеих, оказывается, плотная неровная поверхность и обе отражают солнечный свет.

³⁹ Swerdlow 1998. Подробнее об открытиях, которые Галилей сделал при помощи телескопа, см. Shea 1972, Drake 1990.

⁴⁰ Популярное и весьма увлекательное описание открытий Галилея, а также история телескопа в целом изложены в Panek 1998.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «ЛитРес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на ЛитРес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.