

Стрекаловский А.С.
Орлов А.В.

Биматричные игры и билинейное программирование



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 519.83, 519.853.4

ББК 22.18

С 84



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 06-01-14029*

Стрекаловский А. С., Орлов А. В. **Биматричные игры и билинейное программирование.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 224 с. — ISBN 978-5-9221-0853-9.

В монографии разработан вариационный подход для отыскания ситуаций равновесия по Нэшу в биматричной игре на основе сведения этой игры к некоторой невыпуклой задаче оптимизации. Предложены и обоснованы новые алгоритмы локального и глобального поисков равновесий Нэша. Проведен многоэтапный вычислительный эксперимент, демонстрирующий эффективность разработанного подхода. Полученные результаты обобщаются на случай билинейных задач с несвязанными переменными.

Для специалистов в области теории игр и математического программирования. На основе отдельных глав монографии могут быть прочитаны курсы лекций для студентов математических специальностей университетов.

© ФИЗМАТЛИТ, 2007

ISBN 978-5-9221-0853-9

© А. С. Стрекаловский, А. В. Орлов, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Указатель основных обозначений	6
Введение	7

Часть 1. Элементы исследования операций

Глава 1. Базовые понятия теории игр	15
§ 1.1. Обобщенная субъективная схема операции и ее нормальная математическая модель	15
§ 1.2. Объективное описание бескоалиционной игры	19
§ 1.3. О целях, критериях, неполностью сформулированных моделях и объединении операций	23
§ 1.4. Взаимосвязи различных понятий оптимальности в векторной оптимизации	30
§ 1.5. Существование и характеристика решений Парето	33
§ 1.6. Об оценке эффективности при наличии неконтролируемых факторов. Принцип гарантированного результата и оптимальные гарантирующие стратегии.	37
§ 1.7. Решение примеров	40
Глава 2. Антагонистические и бескоалиционные игры.	45
§ 2.1. Седловые точки	45
§ 2.2. Ситуации равновесия и оптимальные гарантирующие стратегии	48
§ 2.3. Существование ситуаций равновесия в выпукло-компактных играх	51
§ 2.4. Бескоалиционные игры	54
§ 2.5. Равновесие в бескоалиционных играх	56
§ 2.6. Ситуации, оптимальные по Парето	57
Глава 3. Матричные игры	60
§ 3.1. Основные определения	60
§ 3.2. Смешанные стратегии	62
§ 3.3. Смешанное расширение матричной игры и теорема фон Неймана	65
§ 3.4. Основные свойства оптимальных стратегий в матричных играх	68
§ 3.5. Некоторые преобразования матричных игр	75

§ 3.6. К решению матричных игр	77
§ 3.7. Доминирование стратегий	80
§ 3.8. Матричные игры и линейное программирование	83
§ 3.9. Метод Шепли–Сноу	91

Часть 2. Биматричные игры

Глава 4. Элементы теории и методов решения биматричных игр	98
§ 4.1. Основные определения и смешанное расширение биматричной игры	98
§ 4.2. Основные свойства биматричных игр	102
§ 4.3. Биматричные игры и билинейные задачи оптимизации	106
§ 4.4. О решении биматричных игр	109
Глава 5. Решение биматричных игр	118
§ 5.1. D.c. представление целевой функции	118
§ 5.2. Локальный поиск	121
§ 5.3. Глобальный поиск	130
§ 5.4. Решение задачи уровня	134
§ 5.5. Вычисление интервала одномерного поиска	136
§ 5.6. Построение аппроксимации поверхности уровня	138
§ 5.7. Особенности первого вычислительного эксперимента	140
§ 5.8. Этап 1. Тестирование алгоритма глобального поиска	143
§ 5.9. Этап 2. Решение случайно сгенерированных задач небольших размерностей	146
§ 5.10. Этап 3. Выбор наилучшей аппроксимации поверхности уровня	150
§ 5.11. Этап 4. Поиск ситуаций равновесия в играх средней размерности	152
§ 5.12. Этап 5. Решение серий биматричных игр	154
§ 5.13. Модификация алгоритма глобального поиска	156
§ 5.14. Второй вычислительный эксперимент. Этапы 1 и 2. Сравнение эффективности исходного и модифицированного алгоритмов	158
§ 5.15. Этапы 3 и 4. Решение задач больших размерностей	162
§ 5.16. Решение биматричных игр с использованием пакета CPLEX	164
§ 5.17. Заключительные замечания	167
Глава 6. Элементы билинейного программирования	169
§ 6.1. Постановка задачи	169
§ 6.2. Локальный поиск	171
§ 6.3. Алгоритм глобального поиска	179
§ 6.4. Тестирование алгоритмов на задачах небольшой размерности	183

§ 6.5. Генерация тестовых задач	186
§ 6.6. Тестирование локального и глобального поиска на сгенерирован- ных задачах	190
Приложение. Теоретические основы максимизации разности двух выпуклых функций	195
§ A.1. Постановка задачи.	195
§ A.2. Локальный поиск	197
§ A.3. Условия глобальной оптимальности	200
§ A.4. Максимизирующие последовательности.	202
§ A.5. Теоретический метод	205
§ A.6. Стратегия глобального поиска	207
§ A.7. Сходимость стратегии глобального поиска	210
Список литературы	215

Указатель основных обозначений

- $\mathbb{R}$ — пространство всех действительных чисел
 $\mathbb{R}^k$ — k -мерное пространство
 $\mathbb{R}_+^k$ — неотрицательный конус в пространстве $\mathbb{R}^k$
 $\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов x и y
 $:=$ — знак присваивания
 $\triangleq$ — равно по определению
 E — единичная матрица
 e^i — единичные орты (стандартные базисные векторы)
 ∇f — градиент функции f
 $\nabla_x f$ — частный градиент функции f по переменной x
 $\text{Sol}(\mathcal{P})$ — множество решений задачи $(\mathcal{P})$
 $\varepsilon\text{-Sol}(\mathcal{P})$ — множество ε -решений задачи $(\mathcal{P})$
 $\text{Argmin}(\mathcal{P})$ ($\text{Argmax}(\mathcal{P})$) — множество точек, доставляющих минимум (максимум) в задаче $(\mathcal{P})$
 $\Gamma(A)$ — матричная игра с матрицей A
 $\Gamma(A, B)$ — биматричная игра с матрицами A и B
 $v(A), v(\Gamma), v_*$ — значение игры $\Gamma(A)$
 $\text{cl } M$ — замыкание множества M
 $\text{co } M$ — выпуклая оболочка множества M
 $\text{cone } M$ — коническая оболочка множества M
 $X \times Y$ — декартово произведение множеств X и Y
 $\liminf_{s \rightarrow \infty} \zeta_s$ ($\limsup_{s \rightarrow \infty} \zeta_s$) — нижний (верхний) предел последовательности ζ_s
 2^M — множество всех подмножеств M
 $\text{pr}_X Y$ — проекция множества Y на X
 $p[A]$ — вероятность события A
 $\rho(x, y)$ — расстояние между точками x и y
 $\text{Extr } M$ — совокупность крайних точек множества M
 $\text{int } M$ — внутренность множества M
 $\text{epi } f$ — надграфик функции f
 $\text{sign } \zeta$ — знак величины ζ
 $O(t)$ — величина того же порядка малости, что и t
 $(A)_i$ — i -я строка матрицы A
 $[A]_j$ — j -й столбец матрицы A
 S_n — канонический симплекс в пространстве $\mathbb{R}^n$
 e_n — векторы в пространстве $\mathbb{R}^n$, состоящие из единиц
 $|M|$ — мощность множества M
 $\text{supp } (x)$ — носитель (спектр) вектора x

Введение

В начале нового тысячелетия неуправляемое развитие цивилизации создало угрожающе тяжелый пресс конфликтов в различных сферах — политической, экономической, энергетической, военной и т. п., из-под которого человечеству вряд ли удастся выбраться без больших потерь. Задача минимизации этих потерь, прежде всего в экологической сфере, состоит в сохранении той ниши биосферы, в которой человеку удавалось скрываться от космических и геологических катастроф, скажем, последние 10000 лет. Задача эта не просто актуальна, она стала императивом при анализе конфликтов и принятии решений в любой сфере, касающейся экспоненциально глобализирующейся цивилизации.

С другой стороны, человечество никогда еще не обладало тем новым инструментарием для поддержки принятия решений, который оно приобрело в результате рождения компьютерных технологий и бурного развития математических дисциплин принятия решений: исследования операций и теории игр [14, 16, 20, 21, 26, 43, 57, 61, 107, 143], оптимизации [6, 8, 11, 35, 36, 39, 45, 59, 64, 81, 82] и др. Это явление подавляющее большинство человечества оказалось не в состоянии заметить. Кроме того, все более ясно, что без этого нового математического аппарата компьютерная технология, какой бы мощной она ни была, остается лишь средством для бесполезного складирования разнообразной и, возможно, всеобъемлющей (!) информации, т. е. фактически перестает быть технологией, создавая наркотическую иллюзию благополучия в развлекательной индустрии.

Только математический аппарат позволяет рассортировывать информационные потоки в форме математических моделей, неформальных процедур, экспертных оценок и т. п., иначе говоря, в форме удобной для анализа и синтеза накопленной информации, и позволяет делать строго обоснованные выводы и, главное, прогнозы посредством компьютерного эксперимента, основанного на адаптации и реализации теоретических алгоритмов. Удивительные прозрения гениальных предшественников из глубины тысячелетий только в XX веке были синтезированы в прорывные математические технологии, представленные в трудах Джона фон Неймана и О. Моргенштерна [49], Дж. Данцига [31], Л. В. Канторовича [37], А. А. Самарского [68] и многих других. Но это было только начало. Сейчас многие специалисты приходят к выводу о том, что экологическая ниша человечества во многом будет зависеть от того, насколько быстро и фундаментально оно научится применять этот «двурукий» инструментарий во всех сферах, обеспечивающих гомеостаз динамической системы «биосфера» [7, 14, 25, 38, 47, 49, 95, 106, 122].

В частности, конкурентными и способными к выживанию окажутся только цивилизации, использующие динамически развивающиеся компьютерно-математические технологии принятия решений во всех жизненно важных областях.

Эта скромная книга, конечно же, не претендует на решение вышеупомянутых глобальных (эколого-экономических) задач, но она представляет инструментарий, который позволяет исследовать, а часто и решать задачи исследования операций, обладающие некоторой нерегулярностью по отношению к классическим методам решения. Эту нерегулярность можно назвать невыпуклой структурой. Вообще говоря, невыпуклые структуры обладают удивительным разнообразием (сколько типов только нелинейностей!). В то же время в выпуклых задачах (например, задачах оптимизации и сводящихся к ним) известные методы решения (например, ньютоновские) ведут себя достаточно однообразно и находят глобальные решения.

В невыпуклых же задачах классические методики, в зависимости от начального приближения, не могут отыскать необходимые практикам глобальные решения и оказываются в практически безнадежном положении. Действительно, как известно, матричные игры (например, размерности $m \times n$) сводятся к паре задач линейного программирования (вариационный подход), так что, имея современные пакеты программ для решения задач оптимизации, можно решать матричные игры. Поэтому ясно, что матричная игра — это выпуклая задача. Здесь даже эвристический метод Брауна–Робинсона (фиктивный розыгрыш игры) [94, 147] на небольших матрицах показывает неплохие результаты. Ввиду предметной содержательности (участники играют по очереди) этот метод хорошо воспринимается студенческой аудиторией и достаточно популярен среди специалистов, несмотря на медленную сходимость. Но как только вы переходите на задачи повышенной размерности ($m, n \geq 20$), можно забыть про метод Брауна–Робинсон — этот вроде бы весьма практичный плод человеческой фантазии, отвечающий содержанию игры. Здесь вариационный подход в сочетании с пакетами прикладных программ вне конкуренции.

При переходе к биматричным играм (всего две матрицы вместо одной, а размер матриц тот же: $m \times n$) все пакеты программ, основанные на классической идеологии, оказываются беспомощными даже при поиске довольно «слабого» и неустойчивого решения — равновесия по Нэшу — в задачах небольшой размерности. И все потому, что возникает невыпуклая (билинейная) структура, требующая нового математического аппарата, без которого никакие супермощные компьютеры не в состоянии найти (глобальное) решение, интересующее практиков. А аналог метода Брауна–Робинсон для биматричных игр оказывается не в состоянии решить игру, скажем, размерности 3×3 [152].

Последний факт является одной из причин того, что этот метод, а также некоторые другие в данной книге не рассматриваются подробно. Настоящая книга — не учебник по теории игр. Основной ее целью

является представление нового аппарата, основанного на сведениях игры (или какой-то ее части) к некоторой экстремальной задаче, которая отражает в какой-то степени невыпуклую структуру изучаемого объекта. Может оказаться, что для других типов игр этот подход не будет столь продуктивным, как для биматричных игр, но на данном этапе он выглядит весьма перспективным.

Однако как подойти к биматричным играм без знания основ матричных? Поэтому напоминание фундаментальных разделов теории игр, базовых для понимания проблем в биматричных играх, авторы сочли необходимым. Это предопределило структуру книги, в частности, включение в нее вводной части, где нетрудно заметить влияние выдающихся монографий Н.Н. Воробьева [18], Ю.Б. Гермейера [20] и Л.А. Петросяна с соавторами [61].

Одновременно книга, конечно, направлена на повышение образования лиц, принимающих решения (ЛПР, оперирующей стороны), ответственных за «судьбоносные» решения и безответственно относящихся к своему образованию и кругозору. Конечно, исследователь всегда надеется, что его труд будет, по крайней мере частично, прочитан, и не только рецензентами.

Авторы не рискнули бы давать оценки современному состоянию теории игр. Однако на некоторые особенности развития исследования операций, повлиявшие на специфику предлагаемой монографии, хотелось бы обратить внимание.

Специалисты выделяют три основные задачи теории игр:

- конструирование принципов оптимального поведения участников конфликта;
- анализ этих принципов и установление их реализуемости;
- отыскание оптимальных реализаций (стратегий).

За более чем полувековой период развития теории игр, для большого спектра игр (конечных и бесконечных, кооперативных и некооперативных, одношаговых и многошаговых, антагонистических и бескоалиционных, иерархических и дифференциальных) было предложено достаточно много понятий оптимальности и изучены свойства этих игр [3, 4, 9, 15, 16, 18–21, 28, 34, 43, 57, 61, 97, 107, 143, 148]. Классическими понятиями оптимальности в теории игр являются равновесия Нэша и Парето (см. также [48, 93, 132, 133, 138–140]). В первом случае ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша, во втором — все игроки, действуя совместно, не могут (даже нестрого) увеличить выигрыш каждого.

Равновесие по Нэшу является одним из самых слабых, хотя и естественным понятием решения в игровых задачах. Знаменитая теорема Нэша [138] гарантирует существование ситуаций равновесия в конечных бескоалиционных играх. Однако известно, что равновесие по Нэшу обладает рядом недостатков (см., например, [14, 60]). Тем не менее это понятие остается в теории игр основополагающим, оттал-

квиваясь от которого, можно предлагать различные его модификации [60, 116, 117, 119, 134, 135, 137, 145, 146, 168–170]. Результаты, подобные теореме Нэша, гарантируют существование различных равновесных ситуаций, но не дают никаких средств для их отыскания. Поэтому пока большинство этих понятий имеет скорее теоретический характер, поскольку в настоящее время неизвестны эффективные методы отыскания в бескоалиционных играх даже ситуаций равновесия по Нэшу.

Таким образом, представляется, что на данном этапе развития первым двум сформулированным задачам теории игр для рассматриваемых моделей уделено много внимания. К сожалению, этого нельзя сказать о третьей задаче — отыскании оптимальных стратегий поведения участников конфликта. В настоящее время можно считать хорошо разработанными только методы численного поиска решений в самом простом классе игр — матричных (см. первую часть книги). При всей своей элегантности теория матричных игр едва ли приложима к многочисленным проблемам экономики и других социальных наук. Поэтому поиск равновесных решений в более сложных классах игр представляет собой весьма актуальную задачу.

В данной монографии исследуются прежде всего биматричные игры, но акцент делается на разработке численных методов поиска равновесий по Нэшу.

Биматричные игры (простейшие среди бескоалиционных) можно считать первым по сложности обобщением матричных игр. После выхода монографии [14] можно считать, что есть прекрасное введение в тематику биматричных игр. Поэтому авторы данной книги упоминают только тот материал по биматричным играм, который необходим для понимания вариационного подхода.

В литературе [7, 14, 38, 47, 49, 95, 122] приводится ряд практических задач, которые могут быть смоделированы с помощью биматричных игр.

Поиск равновесий в биматричных играх может быть осуществлен с двумя разными целями: а) поиск одной ситуации равновесия; б) поиск всех ситуаций равновесия с целью выделения из множества оптимальных ситуаций тех, которые удовлетворяют дополнительным условиям.

Различные алгоритмы для отыскания ситуаций равновесия были предложены Н. Н. Воробьевым [17], Х. Куном [124], О. Мангасаряном [129] и другими авторами (см. также [100, 157, 172]). Самым популярным способом отыскания ситуаций равновесия по Нэшу в биматричной игре является алгоритм Лемке–Хаусона [123, 128, 132, 153] (см. § 4.4). Он предназначен для поиска решения линейной задачи дополнителности [6, 62, 99], с помощью которого можно построить ситуацию равновесия по Нэшу в биматричной игре. Существуют также его модификации, предназначенные для поиска различных уточненных вариантов равновесий Нэша [132]. Исследования эффективности метода Лемке–Хаусона показывают [149], что для некоторого класса бимат-

ричных игр количество точек, просматриваемых в процессе решения, экспоненциально зависит от размерности задачи. Ситуация аналогична положению симплекс-метода в линейном программировании: практическая эффективность этого метода не подвергается сомнению, однако построены контрпримеры, где число угловых точек, перебираемых в процессе решения, экспоненциально зависит от размерности. Поэтому возникает вопрос о разработке новых методов поиска ситуаций равновесия в биматричных играх, которые оказываются конкурентами для метода Лемке–Хаусона и, возможно, будут полезны для более сложных игр.

Численный поиск всех ситуаций равновесия, естественно, гораздо сложнее. Некоторые результаты решения этой проблемы можно отыскать в [89, 132, 173].

В данной монографии для нахождения одной ситуации равновесия применяется вариационный подход [48, 127, 131, 133], который заключается в следующем. Задача поиска равновесия по Нэшу в биматричной игре сводится к нахождению глобального решения в некоторой билинейной задаче математического программирования. Этот подход, в отличие от метода Лемке–Хаусона, практически неизвестен, поскольку билинейная задача является неразрешимой посредством известных методов. Эта неразрешимость связана, с одной стороны, с тем, что известные методы выпуклой оптимизации (см., например, [6, 11]) в невыпуклых задачах, вообще говоря, находят в лучшем случае только критические (стационарные) точки или, если повезет, локальные решения, которые могут быть очень далеки от глобального решения даже по значению целевой функции.

С другой стороны, доминирующие в настоящее время в глобальной (невыпуклой) оптимизации методы ветвей и границ, отсечений, аппроксимаций и т. п., пришедшие из дискретной оптимизации, «страдают» от так называемого «проклятия размерности». Это означает, что с увеличением размерности объем вычислений по этим методам возрастает экспоненциально, что не позволяет найти именно глобальное решение.

Построенный в последнее время новый аппарат решения невыпуклых задач оптимизации [41, 50–56, 71–80, 125, 157–160], некоторые элементы которого представлены в приложении, на наш взгляд, открывает более широкие возможности действительного поиска равновесных решений в конфликтных ситуациях.

Например, оказывается, что отыскание ситуации равновесия по Нэшу может быть осуществлено стратегией глобального поиска для задач d.c. максимизации [78], когда целевая функция представима в виде разности двух выпуклых функций. Такие функции в литературе [1, 2, 42, 78, 109] принято называть d.c. функциями (the difference of two convex functions — разность двух выпуклых функций).

Задачи d.c. программирования являются одним из классов невыпуклых задач, которые рассматриваются в литературе. Хотя достаточно

сложно в настоящий момент привести полную классификацию задач невыпуклой оптимизации, специалисты выделяют следующие четыре класса задач [78, 113].

1. Выпуклая максимизация (или вогнутая минимизация):

$$f(x) \uparrow \max, \quad x \in D, \quad (0.0.1)$$

где $f(\cdot)$ — выпуклая функция на некотором открытом выпуклом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, содержащем допустимое множество D .

2. Обратно-выпуклые задачи, или задачи на дополнениях выпуклых множеств. Простейшей задачей подобного типа является следующая:

$$\varphi(x) \downarrow \min, \quad x \in S, \quad g(x) \geq 0, \quad (0.0.2)$$

где $\varphi(\cdot)$ — выпуклая функция на выпуклом открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, содержащем множество S , $\varphi(\cdot)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$.

3. Д.с. максимизация:

$$F(x) = f(x) - g(x) \uparrow \max, \quad x \in D, \quad (0.0.3)$$

где $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ — выпуклые функции на некотором открытом выпуклом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \Omega$, т.е. $F(\cdot)$ — д.с. функция.

4. Экстремальные задачи с д.с. ограничениями, простейшая из которых имеет следующий вид:

$$\varphi(x) \downarrow \min, \quad x \in S, \quad F(x) \geq 0, \quad (0.0.4)$$

где $F(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \Omega$, а $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ являются выпуклыми функциями на выпуклом открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, содержащем множество S , $\varphi(\cdot)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно видеть, что при $g(x) \equiv 0$ задача д.с. максимизации (0.0.3) обращается в задачу выпуклой максимизации (0.0.1), так что последняя является частным случаем (0.0.3). Аналогично задача с д.с. ограничениями (0.0.4) при $f(x) \equiv 0$ обращается в задачу (0.0.2) на дополнении выпуклого множества, которая, таким образом, оказывается частным случаем (0.0.4). Итак, можно сказать, что простейшие задачи д.с. программирования (0.0.3) и (0.0.4) согласно предложенной классификации являются основными.

Заметим, что любая невыпуклая экстремальная квадратичная задача (т.е. задача, в которой целевая функция и функции, задающие ограничения-неравенства, являются квадратичными) может быть отнесена к одному из вышеперечисленных классов, поскольку любая квадратичная функция в зависимости от знаков своих собственных значений является либо выпуклой, либо вогнутой, либо д.с. функцией. Поэтому можно говорить о том, что приведенная классификация

является исчерпывающей на классе невыпуклых квадратичных задач оптимизации.

Пионером в изучении свойств д.с. функций является А. Д. Александров [1, 2]. Этой проблемой также занимались Е. М. Ландис [42] и П. Хартман [109]. Некоторые более поздние результаты по д.с. структурам можно найти в [111, 115, 144, 162, 165].

Что касается общепринятых методов решения задач д.с. программирования, как уже говорилось, они пришли из дискретной оптимизации и, как нам кажется, не всегда учитывают специфику и структуру задачи. Другой подход к решению подобных задач был развит с использованием условий глобальной оптимальности [71, 74–78], на основе которых были предложены и протестированы алгоритмы глобального поиска для многих модельных и прикладных задач оптимизации [41, 50–56, 72, 73, 78–80].

Теперь кратко о содержании монографии.

Первая часть посвящена основам исследования операций. Здесь кратко излагаются (часто без доказательств) вводные понятия и результаты, без которых трудно разобраться в последующем материале. В *первой главе* дано введение в проблематику принятия решений при наличии конфликта, рассматриваются элементы векторной оптимизации. Во *второй главе* приведены элементы теории антагонистических и бескоалиционных игр. *Третья глава* посвящена краткому изложению теории и методов решения матричных игр. Особое внимание уделяется вопросам взаимосвязи матричных игр и линейного программирования, позволяющим численно решать эти игры повышенной размерности.

Вторая (основная) часть монографии посвящена исследованию биматричных игр. В начале (в *четвертой главе*) приводятся основные понятия и свойства биматричных игр, например, производится обзор методов поиска ситуаций равновесия по Нэшу в таких играх. При этом акцент делается на методах решения игр повышенной размерности. В частности, задача поиска ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре может быть сведена к отысканию глобального решения в невыпуклой билинейной задаче с несвязанными переменными. Оказывается, последняя задача обладает д.с. структурой. Решению этой задачи и посвящена *пятая глава* монографии, самая объемная. Здесь достаточно подробно представлены все этапы построения алгоритма глобального поиска: от получения явного д.с. разложения целевой функции до численного эксперимента.

Шестая глава книги представляет собой развитие результатов пятой главы на билинейные задачи. Поскольку возникающая при решении биматричных игр задача является задачей билинейного программирования, была предпринята попытка распространить разработанную методiku на билинейные задачи с несвязанными переменными общего вида. Приводятся некоторые известные свойства билинейных задач, предлагаются и исследуются алгоритмы локального и глобального по-

иска. В конце главы представлены результаты первых вычислительных экспериментов по решению случайно сгенерированных билинейных задач.

Наконец, в приложении, рассматривается необходимый теоретический фундамент d.c. максимизации, используемый при решении биматричных игр и билинейных задач.

В книге принята тройная нумерация, которая является сквозной для всех объектов, кроме формул, таблиц и рисунков. Символ # обозначает конец доказательства, алгоритма, примера. Список используемых обозначений приведен в начале книги.

В заключение хотелось бы выразить искреннюю благодарность всем прочитавшим данную работу, особенно д. ф.-м. н. А. С. Антипину, д. ф.-м. н. А. В. Лакееву и д. ф.-м. н. А. В. Батурину.

Особая признательность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку (проекты 06-01-14029д и 05-01-00110а).

Часть 1

ЭЛЕМЕНТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Глава 1

БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

В этой главе представлены основные понятия теории простейших конфликтов в самой общей форме. Вводятся необходимые определения и формулируются основные результаты. Некоторые из них приведены с доказательствами. Материал первой главы, как и всей первой части, достаточно хорошо известен, и более подробное его изложение может быть найдено, например, в классических монографиях Ю. Б. Гермейера [20], Н. Н. Воробьева [18] и в других источниках [26, 61, 70].

§ 1.1. Обобщенная субъективная схема операции и ее нормальная математическая модель

Определение 1.1.1. *Операцией* будем называть совокупность действий, направленных на достижение некоторой цели.

Таким образом, пока не задана цель, не существует и операции. На данном этапе будем считать, что цель у операции единственна.

В математической теории исследования операций можно выделить три направления:

- 1) *моделирование* — создание математической модели операции, дающее математическое описание цели операции, процесса и результатов проведения операции;
- 2) оценка и сравнение эффективности конкурирующих способов действий на основании созданной модели;
- 3) разработка понимания оптимального выбора действий и математических методов их поиска.

Отметим, что первое направление является «пограничной» областью, где особенно важно достижение взаимопонимания и взаимодействия специалистов в рассматриваемой конкретной операции и более широко и абстрактно мыслящих исследователей, которых услов-

но можно назвать математиками. В данной монографии в основном представлено третье направление.

Определение 1.1.2. Совокупность тех лиц или автоматов, которые стремятся в данной операции к поставленной цели, назовем *оперирующей стороной*.

Оперирующая сторона представляет собой, вообще говоря, несколько неопределенную совокупность членов, возможно, совершенно неодинаково участвующих в проведении операции. Однако, если трактовать оперирующую сторону достаточно широко, то в нее войдут и те участники, которые определяют цель операции. В этом случае можно считать, что оперирующая сторона сама формирует себе цель операции.

В иных случаях цель операции назначается извне и обсуждению не подлежит. Так происходит, скажем, в спортивных играх.

Исследователь операции принадлежит к оперирующей стороне и преследует ту же цель. Эта цель должна быть ему известна, равно как и другие обстоятельства проведения операции.

Исследователь операции, как правило, сам не принимает решений по выбору способов действий. Он лишь консультирует оперирующую сторону, а именно, лицо, принимающее решения (ЛПР).

Таким образом, несмотря на принадлежность исследователя к оперирующей стороне, он занимает в ней особое место, исследуя операцию в целом, но будучи зачастую лишенным всей полноты информации об операции и не принимая окончательных решений. В то же время исследователь операции не несет непосредственной ответственности за принятые решения.

Для достижения цели оперирующая сторона имеет в своем распоряжении некоторый запас (ресурс) *активных средств*, который, как правило, расходуется.

Определение 1.1.3. Способы действий, т. е. способы использования активных средств, назовем *стратегиями оперирующей стороны*.

Оценка приемлемости и сравнение стратегий составляет суть работы исследователя операции.

Результаты операции по достижению цели зависят, конечно, при данном количестве активных средств, от выбора стратегий, т. е. от факторов, находящихся в распоряжении оперирующей стороны (*контролируемые факторы*). Однако наряду с этим результаты могут зависеть и от факторов, которые не контролируются оперирующей стороной.

Эти факторы и составляют то, что обычно называют *обстановкой проведения операции*. В сельском хозяйстве — это метеобстановка. В военных действиях основу обстановки составляют действия противника, стремящегося помешать оперирующей стороне. Ситуацию на рынке формируют действия конкурентов и партнеров, грань между которыми не всегда различима.

Самое общее качественное описание компонентов любой операции заканчивается указанием на *информированность оперирующей стороны и исследователя операции об обстановке проведения операции*, т. е. на точность знания значений неконтролируемых факторов в данной конкретной операции.

Неконтролируемые факторы, исходя из информированности о них исследователя операции, следует разделить на три группы.

I. *Фиксированные факторы*, значения которых известны исследователю операции.

II. *Случайные фиксированные факторы*, т. е. случайные процессы с известными законами распределения.

III. *Неопределенные факторы*. Для них известна только область распределения фактора, внутри которой они могут находиться, или область, внутри которой находятся законы распределения (если фактор случаен), но не известен точно закон распределения. В последнем случае лучше говорить о неопределенном законе распределения случайного фактора.

Неопределенные факторы, в свою очередь, следует разбить на следующие подгруппы.

1. Неопределенные факторы, появляющиеся за счет наличия независимо от оперирующей стороны действующих людей или автоматов, не преследующих, вообще говоря, цель оперирующей стороны.

Неопределенные факторы такого типа можно условно назвать *стратегиями противника*, обладающего и своими активными средствами, ограничения которых и набор (пространство) стратегий составят область подобных факторов.

2. Неопределенные факторы, появляющиеся из-за недостаточной изученности каких-либо процессов или величин. Такие неопределенности можно назвать *природными*.

3. Неопределенные факторы, отражающие нечеткость знания цели операции или критерия эффективности. Формально этот вид неопределенных факторов может быть, конечно, отнесен к природным, однако необходимо подчеркнуть его особое место в исследовании операций.

На основании вышесказанного математическую модель операции можно записать в следующем виде:

$$F(x, y) \uparrow \max_x, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

где X — множество стратегий оперирующей стороны; Y — множество неконтролируемых факторов; F — *критерий эффективности*, зависящий как от стратегий, так и от неконтролируемых факторов. Цель операции заключается в максимизации критерия эффективности. Сформулированная модель носит название *субъективной модели*, поскольку исследователь операции «играет» за оперирующую сторону.

Эту модель иногда называют также *субъективной игрой*, или *игрой с природой*.

Введение неконтролируемых факторов является сравнительно новым моментом, выходящим за пределы случайностей в экстремальных задачах. Поэтому нельзя при исследовании операций напрямую применять, скажем, методы оптимизации. Нужен специальный математический аппарат, некоторые элементы которого будут изложены в первых трех главах данной книги. Систематическое изучение ситуаций с неопределенностями представляет собой то новое, что содержит теория исследования операций и теория игр по сравнению с теорией оптимизации.

В заключение параграфа приведем два примера задач исследования операций, описываемых с помощью субъективной модели.

Пример 1.1.4 (строительство моста) [26, 70]. Город, имеющий форму круга, разделен на две половины рекой пренебрежимо малой ширины. Требуется выбрать место для строительства моста так, чтобы минимизировать путь из любой точки одной половины города в любую точку другой половины города (за рекой).

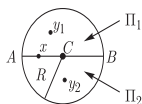


Рис. 1.1.1

Рассмотрим круг с центром C и радиусом R . Место строительства моста представляет собой некоторую точку x на диаметре AB круга (река). Это и есть стратегия оперирующей стороны (строительной организации).

Две произвольные точки в различных половинах города обозначим через y_1 и y_2 . Эти точки являются неопределенными неконтролируемыми факторами.

Множеством стратегий служит отрезок $AB = X$, а областями возможных значений y_1 и y_2 являются соответственно половины круга Π_1 и Π_2 , так что $Y = \Pi_1 \times \Pi_2$.

Критерий эффективности, очевидно, имеет вид

$$F(x, y) = \rho(y_1, x) + \rho(x, y_2).$$

При этом цель заключается в минимизации этой функции, а общая постановка задачи имеет вид

$$F(x, y) \downarrow \min_x, \quad x \in X, \quad y_1 \in \Pi_1, \quad y_2 \in \Pi_2.$$

(Пример будет продолжен в § 1.7.)

#

Пример 1.1.5 (выбор ассортимента товаров) [26, 70]. Пусть имеется однородное сырье в количестве a (активные средства), из которого можно изготовить k видов различных не взаимозаменяемых товаров (например, из кожи можно изготовить обувь различных размеров; из молока — сметану, творог, сыр, масло; из сырой нефти — разные бензины и мазуты). Из единицы сырья можно получить q_i единиц i -го вида товара.

Известны общая потребность во всех видах товаров b и минимальные оценки потребностей в каждом виде товара c_i , $i = 1, \dots, k$, причем

$$\sum_{i=1}^k c_i < b.$$

Такая ситуация вполне реальна. Например, общая потребность в обуви определяется численностью населения, которая известна сравнительно точно, но распределение потребностей по размерам может быть известно весьма приближенно на основе, возможно, статистики проведенных опросов.

Цель операции заключается в максимально возможном удовлетворении потребностей или минимально возможном неудовлетворении потребностей во всех видах товаров.

Стратегией оперирующей стороны (торгующей организации как заказчика продукции или производителя продукции) является вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, где x_i — количество единиц сырья, используемого для производства i -го вида товара. Множество допустимых стратегий может быть представлено в виде

$$X = \left\{ x = (x_1, \dots, x_k) \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k x_i \leq a \right\}. \quad (1.1.1)$$

Неконтролируемым фактором является вектор истинных потребностей $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ во всех видах товаров, причем это неопределенный неконтролируемый фактор со следующей областью возможных значений:

$$Y = \left\{ y = (y_1, \dots, y_k) \mid y_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k y_i \leq b \right\}. \quad (1.1.2)$$

Цели операции соответствует максимизация критерия эффективности:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^k \min\{q_i x_i - y_i, 0\} \uparrow \max. \quad (1.1.3)$$

Выражение (1.1.3) означает, что критерий равен сумме неудовлетворенных спросов со знаком минус и поэтому неположителен: $F(x, y) \leq 0$. Превышение предложения над спросом равноценно просто удовлетворению спроса. Если спрос по всем товарам удовлетворен, значение критерия эффективности равно нулю.

(Пример будет продолжен в § 1.7.)

#

§ 1.2. Объективное описание бескоалиционной игры

Всякая претендующая на адекватность математическая модель социально-экономического и/или природного явления должна отражать присущие ему черты конфликта: различие интересов участвующих в нем сторон, а также разнообразие тех действий, которые эти стороны

могут осуществлять для достижения своих целей. Очевидно, субъективная модель не отражает различные типы противостояний сторон.

Это значит, что исследуемое явление при его математическом моделировании должно наряду с возможными другими представлениями допускать и представление в виде *конфликта*, т.е. такое, в котором отражены следующие его компоненты:

- заинтересованные стороны;
- возможные действия каждой из сторон;
- интересы сторон.

Дадим формальное описание указанных компонентов конфликта, вводя при этом принятую терминологию и обозначения.

Заинтересованные стороны будут далее называться *игроками*, или *лицами*. При этом исследователь операции не принадлежит ни одной из сторон, а является как бы (объективным) арбитром, в задачу которого входит поиск некоторого компромисса.

Множество всех игроков обозначим через I . Будем считать, что $I = \{1, 2, \dots, n\}$, X_i — множество стратегий игрока $i \in I$, $x_i \in X_i$ — стратегия i -го игрока.

В условиях конфликта каждый игрок $i \in I$ выбирает некоторую свою стратегию $x_i \in X_i$, в результате чего складывается набор стратегий $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, называемый *ситуацией*.

Множество всех ситуаций обычно рассматривается в виде

$$X_1 \times \dots \times X_n \stackrel{\Delta}{=} \prod_{i \in I} X_i = \bar{X}.$$

Заинтересованность игроков проявляется в том, что каждому игроку $i \in I$ в каждой ситуации $\bar{x} \in \bar{X}$ приписывается число, выражающее степень удовлетворения его интересов в этой ситуации. Это число называется *выигрышем* игрока i в ситуации $\bar{x}$ и обозначается

$$F_i(\bar{x}) = F_i(x_i, \dots, x_n).$$

Отображение $F_i : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией выигрыша* игрока i , или его *критерием эффективности*.

Таким образом, всякий конфликт будет представлен в виде

$$\Gamma = \{I, \{X_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I}\}. \quad (1.2.1)$$

Такая тройка называется *бескоалиционной игрой*. Подобного сорта игра представляет собой *объективную модель* операции. В этой ситуации речь не идет о неконтролируемых факторах как таковых. Однако понятно, что составляет неконтролируемые факторы для каждого из игроков. Еще раз подчеркнем, что исследователь операции здесь не принадлежит ни одной из сторон конфликта и исполняет роль арбитра.

Среди всех бескоалиционных игр естественным образом выделяется класс *антагонистических игр*, в котором $I = \{1, 2\}$, а значение

функций выигрыша игроков в каждой ситуации равны по модулю и противоположны по знаку:

$$F_1(x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2).$$

Очевидно, что запись (1.2.1) в этом случае можно упростить:

$$\Gamma = \{X_1, X_2, F\}, \quad (F = F_1).$$

Обобщением антагонистических игр являются *игры с нулевой суммой*. В этом случае в игре участвуют n игроков, а сумма всех критериев эффективности в каждой ситуации равна нулю: $\sum_{i=1}^n F_i(\bar{x}) = 0$.

Бескоалиционная игра, в которой множества стратегий каждого игрока конечны, называется *конечной бескоалиционной игрой*. Если для конечной игры двух лиц ставить в соответствие стратегиям игрока 1 строки некоторой матрицы, стратегиям игрока 2 — ее столбцы, а элементам матрицы присваивать значения функции выигрыша игрока 1, получим так называемую *матрицу выигрышей игрока 1*.

Если же элементам матрицы присваивать значения функции выигрыша игрока 2, получится матрица выигрышей игрока 2.

Эта пара матриц полностью описывает конечную неантагонистическую игру двух лиц. Поэтому такие игры называются *биматричными*. Подробнее о свойствах биматричных игр и методах их решения можно прочитать во второй части книги.

Если биматричная игра является антагонистической, то матрица выигрышей игрока 2 полностью определяется матрицей выигрышей игрока 1, поскольку соответствующие элементы этих двух матриц отличаются только знаками.

Поэтому биматричная антагонистическая игра полностью описывается единственной матрицей (матрицей выигрышей игрока 1) и в соответствии с этим называется *матричной*. Эти игры достаточно хорошо изучены в литературе, предложено множество методов их решения. В третьей главе можно найти описание основных свойств и методов решения игр, описываемых одной матрицей.

Приведем несколько простых примеров конечных игр.

Пример 1.2.1 (камень–ножницы–бумага) [24]. Каждый из двух игроков во время своего хода независимо от другого выбирает одну из трех стратегий, называемых «камень» (к), «ножницы» (н), «бумага» (б). Выбранные стратегии сравниваются. Если они совпадают, то выигрыши игроков составляют 0 (ничья), в противном случае побеждает игрок с более сильной стратегией. «Камень» считается сильнее «ножниц», «ножницы» — сильнее «бумаги», которая сильнее «камня». Выигрыш победившего игрока равен 1, проигравшего — -1.

Легко видеть, что данная игра является матричной и может быть записана следующим образом:

$$\begin{array}{c} \text{к} \\ \text{н} \\ \text{б} \end{array} \begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} \text{к} & \text{н} & \text{б} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right]. \end{array}$$

Здесь элементы матрицы — это значения функции выигрыша игрока 1 во всех возможных ситуациях. Обычно значения элементов матрицы рассчитываются именно с точки зрения игрока 1. Так мы будем поступать и в дальнейшем. Строки матрицы — стратегии игрока 1, столбцы — стратегии игрока 2; $I = \{1, 2\}$, $X_1 = X_2 = \{\text{к}, \text{н}, \text{б}\}$.

(Пример будет продолжен в § 3.8.)

#

Пример 1.2.2 (зачет) [18, 70]. Пусть игрок 1 — это Студент, который готовится к зачету, а игрок 2 — Преподаватель, которому предстоит его принимать.

Будем считать, что у Студента две стратегии:

- подготовиться хорошо (ОК);
- подготовиться плохо (Bad).

У Преподавателя тоже две стратегии:

- поставить зачет (+);
- не поставить зачет (—).

Выигрыш студента можно, например, записать так:

$$\begin{array}{c} + \\ \text{ОК} \\ \text{Bad} \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 2 \text{ (оценили по заслугам)} & -1 \text{ (обидно)} \\ 1 \text{ (удалось словить)} & 0 \text{ (получил по заслугам)} \end{array} \right]. \end{array}$$

Выигрыш преподавателя:

$$\begin{array}{c} + \\ \text{ОК} \\ \text{Bad} \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 \text{ (все нормально)} & -2 \text{ (проявил несправедливость)} \\ -3 \text{ (дал себя обмануть)} & -1 \text{ (студент придет еще раз)} \end{array} \right]. \end{array}$$

Этой модели более всего соответствует случай остающегося после беседы сомнения преподавателя в добросовестности студента и отсутствие реальной возможности проводить дальнейшее доскональное выяснение его знаний.

Эта игра является биматричной. В ней $I = \{1, 2\}$, множества стратегий игроков: $X_1 = \{\text{ОК}, \text{Bad}\}$, $X_2 = \{+, -\}$. Значения функций выигрыша приведены в матрицах.

(Пример будет продолжен в §§ 4.1 и 4.4.)

#

Пример 1.2.3 (игра полковника Блотто) [61]. Две воюющие дивизии (игроки) ведут борьбу за два пункта. В первой дивизии 4 полка, во второй — 3 полка. Дивизия, которая посылает больше полков на пункт, занимает его и уничтожает направленные на этот пункт силы противника, получая 1 балл за занятый пункт и по 1 баллу за каждый уничтоженный полк противника. Проигравшая дивизия получает по -1 баллу в обоих случаях. Если силы равны, то игроки получают 0.