

Романовский В.И.

Арифметика помогает алгебре



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 511.1
ББК 22.130
Р 69

Романовский В. И. **Арифметика помогает алгебре.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 376 с. — ISBN 978-5-9221-0880-5.

На примере решения большого числа задач, в т. ч. задач повышенной сложности, показаны возможности и преимущества арифметического метода решения. Книга может быть полезной школьникам на разных этапах обучения, включая подготовку к сдаче ЕГЭ. Знакомство с книгой рекомендуется преподавателям математики для проведения занятий в классах и для факультативной работы с учащимися.

ISBN 978-5-9221-0880-5

© ФИЗМАТЛИТ, 2007

© В. И. Романовский, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Раздел 1. Повторяем арифметику	7
Глава 1.1. Сложение	8
Глава 1.2. Умножение	28
Глава 1.3. Деление и делимость	40
Глава 1.4. Алгоритм Евклида	94
Глава 1.5. Отношения и пропорции	102
Глава 1.6. Простые дроби	118
Глава 1.7. Проценты	160
Глава 1.8. Среднее арифметическое	175
Глава 1.9. Немного логики	187
Раздел 2. На границе с алгеброй	207
Глава 2.1. Зеркальные числа и их свойства	209
Глава 2.2. От результата — к исходному числу	227
Глава 2.3. “Двухкомпонентные” задачи, или смеси .	256
Глава 2.4. Совместная работа	275
Глава 2.5. Движение	287
Глава 2.6. Кому сколько лет?	339
Глава 2.7. Задачи на неизменное произведение	351
Глава 2.8. Начинаем с конца	356
Вместо послесловия	371
Библиография	372

ВВЕДЕНИЕ

В истории черпаем мы мудрость, в поэзии — остроумие, в математике — проницательность.

...кто рассеян, тот пусть займётся математикой, ибо при доказательстве теорем малейшая рассеянность вынуждает всё начинать сызнова.

Фрэнсис Бэкон. “Опыты”

Решение задач — практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь.

Дж. Пойа.

“Математическое открытие”

— Это ещё что за новости? — удивитесь Вы, прочитав название книги. Алгебра — наука вполне самостоятельная и в посторонней помощи не нуждается!

Действительно, арсенал методов и средств, находящихся в распоряжении алгебры, столь разнообразен, что ей по плечу решение любой корректно поставленной задачи.

Тем не менее название книги — не парадокс и не игра слов. Научить детей решать задачи — не единственное и далеко не самое главное назначение школьного курса математики. Гораздо важнее привить школьникам навыки логического мышления, научить их грамотно и кратко формулировать свои мысли. В этом благородном деле арифметике, бесспорно, принадлежит пальма первенства в дружной семье математических наук.

Алгебраический метод решения задач в значительной степени формализован. Для решения задачи достаточно перевести её условие на язык математических символов, а затем решить полученное уравнение или систему уравнений.

Решение задач арифметическим методом требует более глубокого проникновения в сущность описываемых в задаче процессов и явлений, установления логических связей

между конкретными ситуациями и математическими законами.

Универсальность алгебраического метода является причиной того, что даже при решении сравнительно несложных задач мы автоматически обозначаем неизвестные величины привычными символами x , y , z , не замечая лежащего на поверхности арифметического решения.

Цель настоящей книги — показать на конкретных примерах, что арифметический метод достаточно эффективен при решении многих задач повышенной сложности, ведёт к цели кратчайшим путём и в то же время служит прекрасным средством для развития логического мышления.

Тематика собранных в книге задач не выходит за пределы школьного курса.

Книга состоит из двух разделов.

Задачи первого раздела, традиционно решаемые арифметическими методами, отличаются от задач школьного курса неординарностью условий. Эти задачи распределены по главам с учётом теоретического материала, используемого для их решения. В начале главы даётся необходимая информация справочного характера, недостаточно полно представленная в школьной программе.

Задачи второго раздела решаются обычно методами алгебры. Решая эти задачи вначале арифметическим, а затем алгебраическим методами, мы сможем сравнить оба пути решения и оценить достоинства арифметического метода — красоту, логичность и наглядность.

В основу распределения по главам задач этого раздела положены рекомендуемые методы решения, а также физические закономерности, определяющие связи между рассматриваемыми в задаче величинами.

Особая роль отводится решениям задач, помещённым в конце каждой главы. Все решения сопровождаются детальными объяснениями, знакомство с которыми поможет успешнее овладеть методикой доказательных рассуждений. Решив очередную задачу, непременно загляните в конец главы и сравните найденное Вами решение с решением, предложенным автором. Не исключено, что найденный Вами вариант окажется более удачным; в любом случае он заслуживает внимания, открывая ещё один путь к намеченной цели.

Решение собранных в книге задач поможет Вам отточить остроумие, научиться анализировать ситуации, изложенные в условиях задач, и оценить преимущества непредвзятого, широкого поиска возможного подхода к решению

задачи. Чем больше подходов Вы проанализируете, сколь бы причудливыми и экзотическими они ни были, тем больше шансов у Вас на успех. В этом один из секретов всех творчески мыслящих математиков.

При подготовке книги использованы сборники конкурсных и олимпиадных задач, а также другие источники, содержащие задачи повышенной сложности.

Как показывает опыт, предлагаемые методы решения этих задач могут быть освоены учениками 5-х–6-х классов.

В заключение хочу привести высказывание замечательного математика, “учителя учителей” Дж. Пойа:

“Задачи с *глубоким подтекстом*, связанные с окружающей нас действительностью или другими областями знания, а также задачи, рассчитанные на применение *правдоподобных умозаключений* и развивающие у учащихся умение рассуждать, могут скорее способствовать умственной зрелости, чем те задачи, которыми заполнены школьные учебники и которые годны лишь для того, чтобы набить руку в применении одного изолированного правила”.

Единственная возможность привить школьникам вкус к математике заключается в том, чтобы указать им путь к самостоятельной творческой работе.

Математика — это игра, игра ума, самая увлекательная и достойная из игр, придуманных человеком. Здесь нет места слабости, лени, обману; победа целиком зависит от Вашей настойчивости и Вашего умения.

Я надеюсь, что лежащая перед Вами книга поможет сделать ещё один шаг по пути в замечательную страну, имя которой — Математика.

Желаю успеха!

Автор

*Математика — царица наук, а
арифметика — царица математики.*

Карл Фридрих Гаусс

РАЗДЕЛ 1

ПОВТОРЯЕМ АРИФМЕТИКУ

ГЛАВА 1.1

СЛОЖЕНИЕ

— Сложению тебя обучали? — спросила Белая королева.
— Сколько будет один плюс один, плюс один, плюс один, плюс один, плюс один, плюс один, плюс один, плюс один?
— Не знаю, — ответила Алиса. — Я сбилась со счёта.

Л. Кэрролл. “Алиса в стране чудес”

ЗАДАЧИ

1.1.1. На совещание явились 10 человек, и все они обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

1.1.2. В шахматном турнире были сыграны 66 партий, причём каждый из участников сыграл с каждым по одной партии. Сколько было участников турнира?

1.1.3. Старинные часы с боем каждый час отбивают столько ударов, сколько показывает часовая стрелка, и ещё один удар по истечении получаса после каждого полного часа.

а) Сколько ударов отобьют часы за сутки?

б) Сколько времени прошло с начала суток, если часы успели отбить 35 ударов?

1.1.4. Числа от 1 до 10 записаны по окружности произвольным образом. Доказать, что существуют три соседних числа, сумма которых не менее 17.

1.1.5. Для нумерации страниц рукописи понадобились 534 цифры. Сколько страниц в рукописи?

1.1.6. Из повреждённой книги выпала часть сшитых вместе листов. Номер первой выпавшей страницы — 143. Номер последней записан теми же цифрами, но в ином порядке. Сколько страниц выпало из книги?

1.1.7. Трасса эстафеты разбита на три участка разной длины. Сумма длин первого и второго участков — 100 м,

второго и третьего — 200 м, первого и третьего — 180 м. Найти общую протяжённость трассы и длину каждого участка.

1.1.8. В квадратную таблицу размерами $8 \times 8 = 64$ клеток записаны подряд числа от 1 до 64. Доказать, что сумма восьми чисел, выбранных из таблицы — различными способами, но по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца — величина постоянная. Найти эту сумму.

1.1.9. Можно ли занумеровать рёбра куба числами $1, 2, 3, \dots, 12$ так, чтобы для каждой вершины сумма номеров выходящих из неё рёбер была одинаковой?

1.1.10. Разместить в вершинах куба цифры $1, 2, 3, \dots, 8$ так, чтобы обеспечить равенство сумм цифр по всем граням.

1.1.11. В клетках квадрата 3×3 расставить 9 последовательных натуральных чисел так, чтобы суммы чисел в 3 клетках по строкам, столбцам и диагоналям составляли 27.

1.1.12. Расставить цифры $1, 2, 3, \dots, 8$ в клетках неполного квадрата (рис. 1) так, чтобы получить одинаковые суммы по горизонталям, вертикалям и большой диагонали.

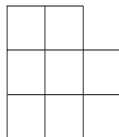


Рис. 1

1.1.13. Расставить вдоль сторон треугольника цифры $1, 2, 3, \dots, 9$ так, чтобы сумма цифр вдоль каждой стороны равнялась 20 (цифра, стоящая в вершине треугольника, принадлежит каждой из сторон, выходящих из этой вершины).

1.1.14. Расставить вдоль сторон треугольника цифры $1, 2, \dots, 9$ так, чтобы суммы цифр по сторонам были равны и: а) минимальны; б) максимальны.

1.1.15. Для группы натуральных чисел от 1 до 99 определить, что больше — сумма чётных или сумма нечётных чисел, и найти разность этих сумм.

1.1.16. Какие 3 целых числа при их сложении и при перемножении дают один и тот же результат?

1.1.17. В записи $8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8$ расставить знаки сложения так, чтобы в сумме получить 1000 (цифры, между которыми не поставлен знак “+”, следует читать как одно число).

1.1.18. Цифра 5 записана в строку подряд 20 раз. Поставить между некоторыми цифрами знаки сложения так, чтобы в сумме получить 1000.

1.1.19. Вычислить: $39 - 37 + 35 - 33 + 31 - 29 + \dots + 3 - 1$.

1.1.20. Вычислить: $S = 99 - 1 + 98 - 2 + 97 - 3 + \dots + 51 - 49$.

1.1.21. Выписаны в строку цифры от 1 до 9. Можно ли расставить между всеми цифрами знаки “+” и “-” так, чтобы в результате получить: а) 21? б) 36?

1.1.22. Выписаны в строку цифры 1, 2, 3, ..., 9. Требуется расставить знаки “+” между некоторыми из цифр таким образом, чтобы получить в результате сложения 99.

1.1.23. Два школьника, возвращаясь домой, увидели весы и взвесили на них свои портфели. Весы показали 3 кг и 2 кг. Когда же школьники положили на весы оба портфеля, весы показали 6 кг. Осмотрев весы, друзья заметили, что стрелка весов сдвинута. Каковы же истинные массы портфелей?

1.1.24. Три друга решили купить одну книгу. Первому для покупки книги не хватало 14 руб., второму — 37 руб., третьему — 25 руб. Когда они сложили все деньги, полученной суммы также оказалось недостаточно. Сколько стоит книга (предполагается, что цена книги выражается целым числом рублей)?

1.1.25. С помощью двух песочных часов, проградуированных соответственно на 3 мин и на 10 мин, отмерить промежутки времени 8 мин и 14 мин.

1.1.26. В ряд стоят 12 слонов, каждый из которых имеет массу, равную целому числу тонн. Если взять любого слона, кроме крайнего справа, и прибавить к его массе удвоенную массу его правого соседа, то получится 15 т (для каждого из 11 слонов). Найти массу каждого из 12 слонов.

1.1.27. Представить число 2004 в виде суммы последовательных натуральных чисел (дать все решения).

1.1.28. На деревянной линейке отмечены три деления: 0, 7 и 11 см. Как отложить с её помощью отрезок длиной: 1) 8 см? 2) 5 см?

1.1.29. Сколько страниц в рукописи, если для их нумерации потребовалось цифр вдвое больше, чем страниц?

РЕШЕНИЯ, ПОЯСНЕНИЯ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Задача 1.1.1.

Способ 1. Каждый из десяти человек, присутствующих на совещании, пожал руки девяти своим коллегам. Однако произведение $10 \times 9 = 90$ даёт удвоенное число рукопожатий,

поскольку в нём для любых двух участников совещания учтено, что первый пожал руку второму, а второй — первому, хотя на самом деле это было одно рукопожатие. Поэтому общее число рукопожатий равно $N = (10 \times 9) : 2 = 45$.

Способ 2. Первый участник совещания пожал руки 9 коллегам, второй — 8 (не считая рукопожатия с первым, которое уже учтено), третий — 7 и т. д. Девятый ограничился одним рукопожатием, а на долю десятого выпала пассивная роль — принимать приветствия. Таким образом, общее число рукопожатий может быть выражено суммой:

$$N = 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1, \text{ или } N = 1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9.$$

Сложив почленно обе суммы, получим:

$$2N = (9 + 1) + (8 + 2) + (7 + 3) + \dots + (2 + 8) + (1 + 9) = 10 \times 9;$$

$$N = (10 \times 9) : 2 = 45.$$

Вывод. Сумма ограниченного ряда последовательных натуральных чисел равна полусумме первого и последнего слагаемых, умноженной на число слагаемых.

Полученное правило справедливо не только для суммирования ряда последовательных натуральных чисел, но и для определения суммы ограниченного числа членов любой последовательности, каждый член которой больше (или меньше) предыдущего на одну и ту же постоянную величину. Такая последовательность носит название *арифметической прогрессии*.

Задача 1.1.2.

Способ 1. Предположим, что каждый участник турнира сыграл с каждым противником не одну, а две партии: одну — белыми, а другую — чёрными. Общее число сыгранных в турнире партий при этом удвоится и составит $66 \times 2 = 132$.

Ситуацию эту можно представить следующим образом. Сначала первый участник, играя белыми, сыграл с остальными (число партий на 1 меньше числа участников), затем второй и т. д. Общее количество сыгранных партий в этом случае равно произведению двух последовательных натуральных чисел, одно из которых равно числу участников, а другое — на 1 меньше (по числу противников у каждого участника).

$132 = 12 \times 11$, следовательно, в турнире участвовали 12 человек.

Способ 2. Данная задача аналогична предыдущей, для их описания пригодна одна и та же математическая

модель — группа точек, попарно соединённых прямыми линиями. Воспользуемся для решения выводом, сделанным в задаче 1.1.1. Число партий, сыгранных первым игроком, на 1 меньше числа участников; число партий, сыгранных вторым игроком, меньше числа участников на 2 (не считая партии с первым игроком, которая уже учтена); и т.д. Общее число сыгранных в турнире партий равно сумме последовательных натуральных чисел, меньшее из которых равно 1, а большее на 1 меньше числа участников турнира. Общее число сыгранных партий равно произведению полусуммы единицы и числа партий, сыгранных первым (т.е. каждым) участником, на число, на 1 меньшее числа участников. $66 = 6 \times 11$; следовательно, число участников равно $11 + 1 = 12$, и каждый из них сыграл по 11 партий.

Задача 1.1.3.

а) Часовая стрелка совершает за сутки два полных оборота. Поэтому достаточно посчитать число ударов за 12 ч, а затем удвоить его.

Суммарное число ударов, отбиваемых еже часно от полудни до полудня, равно сумме $1 + 2 + 3 + \dots + 11 + 12$. Сложив два крайних числа этого ряда, получим 13. Такова же сумма второго числа с предпоследним, третьего — с третьим от конца и т.д. Это очевидно, поскольку, переходя от первого числа ко второму, от второго — к третьему и т.д., мы всякий раз увеличиваем первое слагаемое на 1; передвигаясь же от конца ряда к его началу, мы точно так же при каждом переходе уменьшаем второе слагаемое на 1. Всего слагаемых 12, указанных парных сумм соответственно 6, и сумма ряда равна $1 + 2 + 3 + \dots + 11 + 12 = (12 + 1) \times 6 = 78$.

Заметим, что здесь мы иным путём, нежели в задаче 1.1.1, пришли к формуле, определяющей сумму ряда последовательных натуральных чисел.

Добавив к этой сумме 12 ударов в получасовых интервалах, получим число ударов за первые 12 ч: $78 + 12 = 90$. Всего же за сутки часы отобьют $90 \times 2 = 180$ ударов.

б) Сведём в таблицу количества ударов, отбиваемых еже часно, с учётом боя в получасовых интервалах.

Время, часы	1	2	3	4	5	6	7	8
Число ударов за истекший час	2	3	4	5	6	7	8	9
Число ударов от начала суток	2	5	9	14	20	27	35	44

Требуется определить, в котором часу сумма чисел во второй строке таблицы достигнет 35. В рассматриваемом случае число слагаемых невелико, и ответ может быть получен непосредственным сложением (третья строка таблицы): $35 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$. Следовательно, 35-й удар часов прозвучал в 7 ч утра.

Для больших чисел предпочтительней иной метод, основанный на следующем свойстве натуральных чисел: любое натуральное число есть среднее арифметическое двух соседних чисел либо двух чисел, расположенных в числовом ряду по обе стороны от данного числа и равноудалённых от него. При нечётном числе членов ограниченного ряда средний член ряда равен полусумме первого и последнего членов, либо второго и предпоследнего, и т. д. Сумма такого ряда, согласно сказанному выше, равна произведению среднего члена ряда на число членов.

В рассматриваемом случае сумма ряда равна $35 = 5 \times 7$. Число членов суммируемого ряда на 1 меньше последнего члена ряда (к числу ударов, прозвучавших на исходе часа, добавляется удар, отбитый в получасовом интервале). Значит, это число заведомо больше среднего члена ряда. Отсюда следует, что число членов суммируемого ряда равно 7, и 35-й удар часов возвестил наступление восьмого часа.

Замечание. Покажем, что исследуемый числовой ряд не может иметь чётное число членов. При чётном числе членов суммируемый ряд может быть разбит на пары чисел с равными суммами (см. первую часть задачи). Сумма такого ряда равна произведению суммы первого и последнего членов на число таких сумм (оно вдвое меньше численности ряда). Сумма рассматриваемого ряда $35 = 5 \times 7$. Если предположить, что число членов в этом ряду — чётное, то таких членов должно быть по меньшей мере $5 \times 2 = 10$, и в этом случае число 7 должно было бы представлять собой сумму первого и последнего членов, тогда как последний член был бы равен 11, т. е. на 1 больше числа суммируемых членов. Следовательно, наше предположение неверно.

Задача 1.1.4.

Двигаясь по окружности, можно составить 10 троек соседних чисел. В этих тройках каждое из чисел будет встречаться трижды — на первом, на втором и на третьем месте. Сумма чисел от 1 до 10 равна $1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 =$

$$= \frac{(1+10)}{2} \times 10 = 55 \text{ (см. задачу 1.1.1). Поскольку каж-}$$

дое число входит в состав трёх троек, сумма чисел во всех

тройках втрое больше суммы чисел, записанных по окружности, и равна $55 \times 3 = 165$. Всего троек 10, следовательно, в среднем на одну тройку приходится сумма $165 : 10 = 16,5$. Даже при допущении, что существуют 9 троек соседних чисел, в каждой из которых сумма чисел равна 16, для десятой тройки эта сумма составит $165 - 16 \times 9 = 21 > 17$, что и требовалось доказать.

Задача 1.1.5.

Для нумерации первых 9 страниц рукописи использованы 9 цифр. Следующие 90 страниц занумерованы двузначными числами; для этого потребовались $90 \times 2 = 180$ цифр. Остаток, приходящийся на трёхзначные номера, составляет $534 - (180 + 9) = 345$ цифр. Из этих цифр составлены $345 : 3 = 115$ трёхзначных номеров.

Итого число страниц в рукописи равно $9 + 90 + 115 = 214$.

Задача 1.1.6.

Первая выпавшая страница имеет нечётный номер. Следовательно, номер последней выпавшей страницы — чётный и равен 314 (единственное чётное число, большее 143 и составленное из тех же цифр). В книге остались 142 страницы, предшествующие выпавшим. Поэтому число выпавших страниц равно $314 - 142 = 172$.

Задача 1.1.7.

Способ 1. В трёх данных суммах длина каждого из трёх участков эстафеты встречается дважды. Поэтому, сложив три данные суммы, получим удвоенную длину трассы эстафеты. Обозначим длину трассы эстафеты L , а длины её отдельных участков соответственно L_1, L_2 и L_3 . Тогда:

$$\begin{aligned} L &= 0,5(100 + 200 + 180) = 240 \text{ м;} \\ L_1 &= L - (L_2 + L_3) = 240 - 200 = 40 \text{ м;} \\ L_2 &= L - (L_1 + L_3) = 240 - 180 = 60 \text{ м;} \\ L_3 &= L - (L_1 + L_2) = 240 - 100 = 140 \text{ м.} \end{aligned}$$

Способ 2. Суммарная длина второго и третьего участков эстафеты на 20 м больше суммарной длины первого и третьего участков: $200 - 180 = 20$ м. Следовательно, второй участок на 20 м длиннее первого. Имеем сумму длин первого и второго участков (100 м) и их разность (20 м). Если удлинить первый участок на 20 м, то он сравняется по длине со вторым, а их сумма составит 120 м. Следовательно,

длина второго участка $L_2 = 120 : 2 = 60$ м;

длина первого участка $L_1 = L_2 - 20 = 60 - 20 = 40$ м;
длина третьего участка $L_3 = (L_1 + L_3) - L_1 = 180 - 40 = 140$ м;
длина трассы эстафеты $L = L_1 + L_2 + L_3 = 40 + 60 + 140 = 240$ м.

Задача 1.1.8.

Найдём сумму чисел по диагонали, идущей из левого верхнего угла таблицы в правый нижний:

$$1 + 10 + 19 + 28 + 37 + 46 + 55 + 64 = \frac{(1 + 64) \times 8}{2} = 260.$$

Применение формулы, полученной в задаче 1.1.1 для определения суммы ряда, справедливо, поскольку суммируемый ряд представляет собой арифметическую прогрессию — каждый последующий член ряда больше предыдущего на 9.

Составленная сумма соответствует условию — каждый столбец и каждая строка таблицы представлены в ней одним слагаемым. Докажем, что найденная сумма есть для данной таблицы величина постоянная. Предположим, что при выборе второго слагаемого мы сместились на три цифры вправо и слагаемое 10 заменили на 13. В этом случае окажется, что в составленной сумме пятый столбец будет представлен двумя числами: 13 и 37, а второй столбец останется невостребованным. Привести составленную сумму в соответствие с условием задачи можно, заменив в ней число 37 на число 34, взятое из второго столбца. Видим, что увеличение числа во второй строке на 3 повлекло за собой такое же уменьшение числа в пятой строке. Аналогичную картину наблюдаем при смещении вдоль столбца. В этом случае при сдвиге на одну клетку число будет увеличиваться или уменьшаться на 8, однако общий итог останется прежним.

Описанный принцип сохраняется и в случае, когда изменены несколько чисел, входящих в составленную сумму. Сумма сдвижек по таблице вправо и вниз равна сумме сдвижек влево и вверх, найденная же сумма восьмёрки чисел (260) остается неизменной.

Сумма вписанных в таблицу чисел:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 63 + 64 = \frac{(1 + 64) \times 64}{2} = 65 \times 32 = 260 \times 8.$$

Видим, что чисел в таблице хватает в точности на 8 одинаковых сумм по 260.

Задача 1.1.9.

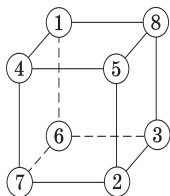
Предположим, задача имеет решение, и сумма номеров трёх рёбер, сходящихся в одной вершине, равна S . В этом случае для всех вершин куба сумма номеров рёбер равна $8S$. Каждое ребро куба соединяет две вершины, поэтому при сложении сумм, полученных для каждой вершины, номера всех рёбер удваиваются:

$$8S = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 12) = 2 \frac{(1 + 12) \times 12}{2} = 156.$$

Число 156 не кратно 8, поэтому задача не имеет решения.

Задача 1.1.10.

Сумма всех цифр, размещённых в вершинах куба, равна $1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \frac{(1 + 8) \times 8}{2} = 36$. Каждая из цифр принадлежит трём граням, поэтому результат суммирования цифр по всем граням равен $36 \times 3 = 108$. Сумма цифр на одной грани куба равна $108 : 6 = 18$. Составим из данных цифр 6 сумм по 18 так, чтобы каждая из цифр встречалась в этих суммах ровно 3 раза, и, кроме того, 2 одинаковые цифры встречались только в двух суммах (каждое ребро, обозначенное двумя цифрами, принадлежит двум граням). Например, цифры 1 и 8 встречаются в первых двух суммах, поэтому третью возможную сумму, включающую эти цифры $(1 + 2 + 7 + 8)$, мы не используем. Выбор наш объясняется тем, что цифры 2 и 7 встречаются в составленных суммах трижды, т. е. максимальное число раз.



$$\left. \begin{array}{l} 1 + 3 + 6 + 8 \\ 1 + 4 + 5 + 8 \\ 1 + 4 + 6 + 7 \\ 2 + 3 + 5 + 8 \\ 2 + 3 + 6 + 7 \\ 2 + 4 + 5 + 7 \end{array} \right\} = 18$$

Рис. 2

Расстановку цифр в вершинах куба (рис. 2) выполняем на основании составленных сумм. В одной из вершин ставим цифру 1; концы рёбер, выходящих из этой вершины, нумеруем цифрами 4, 6 и 8 — именно эти три цифры дважды

встречаются в суммах с цифрой 1. Рассуждая аналогично, расставляем оставшиеся 4 цифры.

Замечание. Другое решение задачи может быть представлено следующими суммами (каждая сумма соответствует определенной грани). Цифры 1 и 3 не встречаются совместно ни в одной из сумм, поэтому они не принадлежат одной грани и размещены на большой диагонали.

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 2 + 7 + 8 \\ 1 + 4 + 5 + 8 \\ 1 + 4 + 6 + 7 \\ 2 + 3 + 6 + 7 \\ 2 + 3 + 5 + 8 \\ 3 + 4 + 5 + 6 \end{array} \right\} = 18$$

Задача 1.1.11.

Сумма чисел по каждой из трёх строк равна 27. Поэтому сумма всех чисел, которые следует вписать в квадрат, равна $27 \times 3 = 81$. Поскольку искомые числа — последовательные натуральные числа и их количество — нечётное, среднее из них равно $81 : 9 = 9$ (см. задачу 1.1.3).

Следовательно, в квадрат должны быть вписаны числа 5, 6, 7, ..., 12, 13. Составим из этих чисел сочетания по три числа, сумма которых равна 27:

$$\left. \begin{array}{l} 8 + 9 + 10 \\ 7 + 9 + 11 \\ 6 + 9 + 12 \\ 5 + 9 + 13 \\ 7 + 8 + 12 \\ 6 + 8 + 13 \\ 6 + 10 + 11 \\ 5 + 10 + 12 \end{array} \right\} = 27$$

8	13	6
7	9	11
12	5	10

Видим, что число возможных комбинаций равно 8. Направлений, по которым должны быть составлены суммы 27, также 8. Поэтому задача имеет одно решение.*

Число 9 встречается в составленных группах 4 раза и, следовательно, находится в центральной клетке, на пересечении двух диагоналей, строки и столбца.

Числа 6, 8, 10, 12 встречаются по три раза и должны быть размещены в углах квадрата, в клетках, принадлежащих одновременно строке, столбцу и диагонали.

Числа 5, 7, 11, 13 встречаются по два раза, т. е. находятся либо в средней строке, либо в среднем столбце и являются общими для строки и столбца.

Заполняем квадрат, учтя приведённые соображения. Строим диагональ 8-9-10, затем рядом с числом 8 вписы-

ваем 13 (в одной строке или в одном столбце). Дальнейшее заполнение квадрата не составляет труда.

Замечания.

1.* Поворот квадрата либо зеркальное его отображение не следует считать новым решением, поскольку в строках, столбцах и по диагоналям повторяются те же комбинации чисел.

2. Сумма чисел, расположенных в вершинах квадрата, равна сумме чисел, занимающих центральные места на сторонах квадрата (объясните причину такого совпадения).

3. Построенный выше квадрат относится к числу так называемых волшебных или магических квадратов. Идея составления волшебных квадратов возникла в Китае около 7000 лет назад. За истекшее время придуманы сотни остроумных способов составления волшебных квадратов.

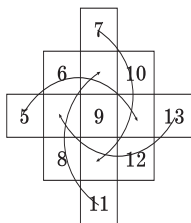


Рис. 3

Рассмотрим один из таких способов применительно к настоящей задаче.

Пристроим к нашему квадрату 4 клетки — по одной с каждой стороны в центральной строке и в центральном столбце (рис. 3). Впишем в построенную фигуру по трём параллельным диагоналям имеющиеся в нашем распоряжении последовательные числа, как это показано на рисунке. Затем числа, оказавшиеся за пределами нашего квадрата,

перенесём внутрь квадрата, смещая каждое из них по строке или столбцу в дальнюю свободную клетку.

Задача 1.1.12.

Сумма цифр, которые следует расставить в клетках квадрата, равна 36.

При равенстве сумм в строках (в столбцах) сумма в строке, в столбце, а также на большой диагонали составит $36 : 3 = 12$.

Сумму 12 в неполных строке и столбце можно набрать из имеющихся цифр двумя способами: $4 + 8 = 5 + 7 = 12$. Цифра 8 не может находиться на большой диагонали, поскольку на другом конце диагонали могут быть только цифры 5, либо 7 (оба конца большой диагонали принадлежат неполным строке и столбцу).

Ставим на одном конце диагонали цифру 4, на другом 5 (или 7 — оба варианта идентичны). В центральную клет-

ку квадрата помещаем цифру 3, обеспечивая сумму цифр 12 по большой диагонали. Дальнейшее заполнение квадрата не представляет сложности.

Задача 1.1.13.

Сумма цифр от 1 до 9 равна 45. При сумме цифр 20 вдоль каждой стороны сумма цифр по трём сторонам равна 60. Полученная разность $60 - 45 = 15$ объясняется тем, что каждая из цифр, размещённых в вершинах треугольника, принадлежит двум сторонам и суммируется дважды. Следовательно, сумма цифр, стоящих в вершинах, равна 15. На рис. 4 приведен один из вариантов размещения цифр. Предлагается самостоятельно отыскать другие варианты.

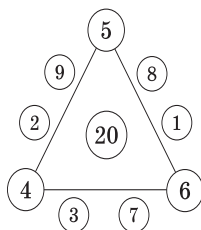


Рис. 4

Задача 1.1.14.

а) Очевидно, для получения минимальной суммы следует в вершинах треугольника разместить цифры 1, 2, 3. Складывая суммы по каждой из сторон, получим: $45 + (1 + 2 + 3) = 51$. Сумма цифр по одной стороне равна $51 : 3 = 17$.

б) Максимальную сумму получим, разместив в вершинах цифры 7, 8, 9. Результат сложения сумм по трём сторонам составит $45 + (7 + 8 + 9) = 69$. Сумма цифр по одной стороне равна в этом случае $69 : 3 = 23$.

На рис. 5 приведены варианты решений для двух рассмотренных случаев.

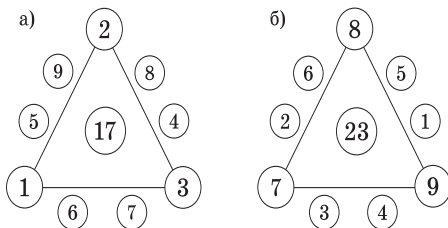


Рис. 5

Задача 1.1.15.

Разобьём числа первой сотни, записанные в возрастающем порядке, на пары. Всего таких пар будет 50, и в каждой паре чётное число больше нечётного на 1, т.е. сумма чётных чисел первой сотни больше суммы нечётных чисел на 50. Отняв от суммы чётных чисел 100, получим, что в группе натуральных чисел от 1 до 99 сумма чётных чисел меньше суммы нечётных на 50.

Задача 1.1.16.

$$1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3 = 6.$$

Покажем, что это решение — единственное. Прежде всего заметим, что сумма двух натуральных чисел только в одном случае равна их произведению: $2 + 2 = 2 \times 2$. Это следует из определения: умножить число на 2 — значит повторить его слагаемым два раза. При увеличении одного из чисел произведение этих чисел растёт вдвое быстрее, чем их сумма; в результате возникает разность между произведением и суммой двух чисел, равная величине “добавки”: $2 \times (2 + k) - [2 + (2 + k)] = k$.

Замена второй двойки на большее число ещё существенней увеличит разрыв между произведением чисел и их суммой. Из сказанного следует, что минимально возможная разность между произведением и суммой двух разных чисел равна 1: $2 \times 3 - (2 + 3) = 1$. Выбор единицы в качестве третьего числа сведёт эту разность к нулю — сумма чисел увеличится на 1, а произведение не изменится.

Задача 1.1.17.

Сумма нескольких слагаемых, каждое из которых оканчивается цифрой 8, кратна десяти, если число слагаемых кратно пяти. В рассматриваемом случае число слагаемых не более восьми и, следовательно, равно пяти. Одно из слагаемых (и только одно!) — трёхзначное, поскольку в противном случае сумма окажется меньше либо больше требуемой. Оставшиеся пять восьмёрок можно распределить на четыре слагаемых единственным способом: $88 + 8 + 8 + 8$.

Искомое выражение выглядит так: $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$.

Задача 1.1.18.

Для получения требуемой суммы недостаточно объединить все пятёрки в двузначные числа ($55 \times 10 = 550 < 1000$). Следовательно, одно из слагаемых — трёхзначное число. Если предположить, что остальные слагаемые — числа однозначные, то сумма составит $555 + 5 \times 17 = 640$. Недо-

стающие для получения требуемой суммы 360 единиц можно получить, объединив часть пятёрок в двузначные числа. При замене суммы двух пятёрок числом 55 общая сумма увеличивается на 45. $360 : 45 = 8$, следовательно, необходимо объединить 16 пятёрок в 8 двузначных чисел: $555 + 55 \times 8 + 5 = 1000$.

Задача 1.1.19.

Рассмотрим пары чисел, между которыми стоит минус. Результат вычитания для каждой из пар неизменный: $39 - 37 = 35 - 33 = \dots = 3 - 1 = 2$. Число таких пар равно 10, поэтому искомым результатом равен $2 \times 10 = 20$.

Задача 1.1.20.

Пример представляет собой разность двух рядов последовательных натуральных чисел, причём числа первого ряда расположены в порядке убывания (99, 98, 97, ..., 51), а числа второго ряда — в порядке возрастания (1, 2, 3, ..., 49). Изменив порядок следования чисел второго ряда на обратный, получим выражение, эквивалентное заданному:

$$\begin{aligned} S &= 99 - 49 + 98 - 48 + 97 - 47 + \dots + 51 - 1 = \\ &= (99 - 49) + (98 - 48) + \dots + (51 - 1) = 50 \times 49 = 2450. \end{aligned}$$

Задача 1.1.21.

Расставив между всеми цифрами знаки “+”, получим сумму 45. Если теперь изменить перед одной из цифр знак “+” на “-”, сумма ряда уменьшится на удвоенную величину этой цифры. Поэтому в результате любой замены знаков первоначальная сумма 45 будет уменьшаться на чётную величину, и, следовательно, новый результат всегда будет нечётным.

Итак, получить указанным способом число 36 либо другое чётное число невозможно. Результат 21 можно получить, уменьшив первоначальный результат на 24.

Для этого нужно поменять знаки “+” на “-” перед цифрами, дающими в сумме 12. Таких возможностей существует несколько: $12 = 1 + 2 + 3 + 6 = 1 + 2 + 4 + 5 = 1 + 2 + 9 = \dots$

Вариант ответа: $1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 - 8 + 9 = 21$.

Задача 1.1.22.

Расставив между всеми цифрами знаки “+”, получим сумму 45, на 54 меньше желаемого результата. Следовательно, некоторые цифры нужно объединить в двузначные числа, не разделяя их знаками сложения. Рассмотрим на конкретном примере, как изменится сумма при объедине-

нии цифр 5 и 6. Включение цифры 6 в двузначное число не отразилось на общем результате, т. к. цифра эта по-прежнему добавляет к общей сумме 6 единиц. Переход же цифры 5 из разряда единиц в разряд десятков добавил к общей сумме 45, т. е. девятикратную величину цифры — “перебежчика”. Отсюда ясно, что добавить к общей сумме 54 можно, переведя в разряд десятков цифру 6 ($54 : 9$) либо две цифры, дающие в сумме 6. Возможны три варианта решения:

а) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 99$;

б) $12 + 3 + 4 + 56 + 7 + 8 + 9 = 99$;

в) $1 + 23 + 45 + 6 + 7 + 8 + 9 = 99$.

Задача 1.1.23.

Ошибка при взвешивании возникла из-за того, что у весов смещена стрелка. Поэтому при каждом взвешивании весы дают одну и ту же погрешность. Суммарный же результат двух взвешиваний отличается от истинного на удвоенную погрешность. Следовательно, сумма результатов раздельного взвешивания портфелей превышает результат, полученный при совместном их взвешивании, на величину погрешности весов.

Погрешность весов равна $(3 + 2) - 6 = -1$ кг. Минус перед величиной погрешности говорит о том, что стрелка весов сбита влево, т. е. каждое показание весов занижено на 1 кг.

Истинная масса первого портфеля 4 кг, второго 3 кг.

Задача 1.1.24.

У первого друга на 23 руб. больше, чем у второго, у третьего — на 12 руб. больше, чем у второго. Если предположить, что у второго друга в кошельке пусто, то книга в таком случае стоит 37 руб. (ровно столько не хватило второму), а первый и третий внесли в общую кассу $23 + 12 = 35$ руб. Для приобретения книги недостает 2 руб.

Увеличение цены книги на 1 руб. соответствует увеличению наличной суммы у друзей на 3 руб. (разность между ценой книги и суммой денег у каждого из друзей — величина постоянная, поэтому каждому следует добавить по рублю). При этом сумма денег у троих друзей сравняется с ценой книги, что противоречит условию. Следовательно, книга стоит 37 руб.

А.¹ Обозначим: x — цена книги.

¹ Здесь и далее — алгебраический метод решения.

Сумма денег у первого друга: $x - 14$; сумма денег у второго друга: $x - 37$; сумма денег у третьего друга: $x - 25$.

Итого в кассе $(x - 14) + (x - 37) + (x - 25) = 3x - 76 < x \Rightarrow x < 38$. Но по условию $x \geq 37$ (знак равенства соответствует случаю отсутствия денег у второго друга). Из двух неравенств следует: $x = 37$.

Задача 1.1.25.

Песочные часы могут отмерить требуемый промежуток времени, если величина этого промежутка кратна продолжительности истечения песка в часах. Для условий задачи это требование не выполняется, поэтому отмерим требуемое время, используя разность показаний двух имеющихся песочных часов.

Количество минут, отмеряемых большими часами,ратно 10. Для того, чтобы отмерить 8 мин, возможны два пути.

а) С помощью малых, трёхминутных часов следует отмерить минимальное время, выраженное числом с цифрой 2 в разряде единиц, и затем “вычест” это время из ближайшего большего числа минут, отмеренного большими часами.

“Запускаем” одновременно большие и малые часы. Переворачивая их по истечении песка, фиксируем момент, когда трёхминутные часы отмерят 12 мин (4 цикла). От этого момента и до момента истечения песка в больших часах пройдёт 8 мин: $10 \times 2 - 3 \times 4 = 8$.

Чтобы отмерить промежуток времени 8 мин, потребовалось 20 мин (2 цикла больших часов). Окончание замера фиксируется по большим часам.

б) С помощью малых часов отмерим число минут, оканчивающееся цифрой 8, и “вычтем” из него ближайшее меньшее число минут, кратное 10.

“Запустив” часы одновременно, начнем отсчёт времени по прошествии 10 мин (один цикл больших часов). Шестикратное истечение песка в малых часах — сигнал к завершению отсчёта: $3 \times 6 - 10 = 8$.

Этот вариант предпочтительней, поскольку для замера потребовалось времени на 2 мин меньше, чем по первому варианту.

Используя описанный принцип, можно с помощью имеющихся часов отмерить любое требуемое время двумя способами. Например, $14 = 10 \times 2 - 3 \times 2 = 3 \times 8 - 10$.

Указанная возможность объясняется тем, что число, кратное 3, может оканчиваться любой цифрой.

Измерение времени с помощью песочных часов разного “калибра” сродни ситуации, когда покупатель получает сдачу, не имея нужных денежных купюр для точного расчета.

Задача 1.1.26.

Предположим, что слоны построены в том же порядке, но не в ряд, а по окружности, так что правее слона №12 стоит слон №1. Допустим, что при сложении массы слона №12 с удвоенной массой слона №1 мы получим в сумме те же 15 т, что и в остальных случаях. В рассматриваемых суммах масса каждого из слонов учитывается трижды: один раз, когда слон стоит слева, и дважды для правого слона. Следовательно, суммарная масса слонов равна $15 \cdot 12 : 3 = 60$ т. Ситуация, когда каждый из слонов имеет среднюю массу $60 : 12 = 5$ т, отвечает условию. Покажем, что это решение — единственное. Для этого достаточно доказать, что масса слона №1 равна 5 т. Прежде всего заметим, что масса P_i каждого из слонов (кроме, быть может, двенадцатого) выражена нечётным числом: если предположить, что P_i — число чётное, получим чётную сумму $P_i + 2P_{i+1}$, что противоречит условию. Принимая последовательно значения P_1 из: 1, 3, 7, 9, 11, 13, получаем чётное значение P_2 или P_3 , что неприемлемо по доказанному выше.

Задача 1.1.27.

Сумма ряда последовательных натуральных чисел равна их среднему арифметическому (или среднему члену ряда), умноженному на число членов.

Рассмотрим две возможности.

1. Количество чисел в искомом ряду — нечётное. В этом случае средний член ряда существует.

Число 2004 имеет 4 нечётных делителя: 1, 3, 167 и $3 \times 167 = 501$. Делитель 1 отбрасываем, поскольку искомое число слагаемых больше 1.

а) $2004 : 3 = 668$; $2004 = 667 + 668 + 669$.

б) $2004 : 167 = 12$. Поскольку не существует ряда из 167 последовательных натуральных чисел, средний член которого равен 12, число 2004 может быть представлено в виде суммы нечётного числа слагаемых единственным способом.

2. Количество чисел в искомом ряду — чётное.

В этом случае среднее арифметическое всех членов ряда равно полусумме двух срединных его членов и представляет собой смешанное число, дробная часть которого равна $1/2$. Отсюда — ещё два решения задачи.

а) Число 2004 делится на 4, но не делится на 8. Следовательно, искомый ряд образуют 8 чисел, среднее арифметическое которых равно $2004 : 8 = 250\frac{1}{2}$: $2004 = 247 + 248 + 249 + \dots + 253 + 254$.

б) $2004 : (8 \times 3) = 83\frac{1}{2}$; $72 + 73 + 74 + \dots + 82 + 83 + \dots + 94 + 95 = 2004$.

В ы в о д ы.

1. Простое число может быть представлено в виде суммы последовательных чисел только одним способом (два слагаемых).

2. Число может быть представлено суммой чётного числа слагаемых, если кратность числа слагаемых числу 2 на порядок выше кратности данного числа числу 2.

3. Число N может быть представлено суммой k слагаемых, если частное $N/k > k/2$.

Задача 1.1.28.

Очевидно, для решения задачи необходимо выполнить ряд операций по сложению и вычитанию отрезков известной длины.

Чтобы сложить два отрезка, следует отложить их от произвольной точки на некоторой прямой по разные стороны от этой точки.

Находя разность двух отрезков, мы откладываем меньший отрезок на большем от одного из концов большего отрезка.

Алгоритм откладывания отрезков требуемой длины можно представить в виде следующих операций.

1) Отложим отрезок длиной 8 см.

а) $11 - 7 = 4$; $7 - 4 = 3$; $11 - 3 = 8$;

б) $7 + 7 = 14$; $14 - 11 = 3$; $11 - 3 = 8$;

в) $11 + 11 = 22$; $22 - 7 = 15$; $15 - 7 = 8$.

Легко заметить, что все три цепочки построений сводятся к одному и тому же действию: $(11 + 11) - (7 + 7) = 8$. Разница состоит лишь в очередности выполнения промежуточных операций. Очередность эта определяется длиной имеющейся линейки. Так, при длине линейки менее 14 см пригоден лишь первый способ, при длине менее 22 см — первые два.

2) Отложим отрезок длиной 5 см.

а) $11 \times 3 - 7 \times 4 = 5$ (здесь, как и в предыдущем случае, последовательность операций сложения и вычитания определяется длиной линейки);

б) используем результаты первых двух построений п. 1) и отложим отрезок $8 - 3 = 5$.

Задача 1.1.29.

Число страниц в рукописи — трёхзначное. Если предположить, что искомое число находится в первой сотне, то в этом случае число цифр превышает число страниц менее, чем вдвое (на нумерацию первых девяти страниц уходит по одной цифре). Для покрытия дефицита в 9 цифр следует добавить 9 страниц, пронумерованных трёхзначными числами. Число страниц рукописи равно $99 + 9 = 108$.

А. Обозначим: n — число страниц рукописи.

Число цифр, использованных для нумерации первых 99 страниц, равно $9 + 90 \times 2 = 189$.

$$\frac{189 + 3(n - 99)}{n} = 2; \quad n = 297 - 189 = 108.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сколько различных по величине или по расположению квадратов, состоящих из целого числа клеток, можно начертить на шахматной доске?

2. У трёхзначного числа поменяли местами две последние цифры и сложили полученное число с исходным. В результате получилось число 1187. Найти исходное число.

3. Из чисел 21, 19, 30, 35, 3, 12, 9, 15, 6, 27 выбрать такие три числа, сумма которых равна 50.

4. Имеются гириками массами $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$. При каком наименьшем n их можно разложить на чаши весов так, чтобы веса уравновесились?

5. Найти двузначное число, которое является результатом сложения суммы его цифр с квадратом этой суммы.

6. Сумма первых n натуральных чисел — трёхзначное число, записанное одинаковыми цифрами. Найти число слагаемых.

7. Какой цифрой оканчивается сумма квадратов натуральных чисел от 1 до 99?

8. Существуют ли два последовательных натуральных числа, суммы цифр которых делятся на 7?

9. В шахматном турнире приняли участие 30 человек. Разряд присвоили тем, кто набрал не менее 60% возможных очков. Найти максимальное число участников, которым может быть присвоен разряд.

10. Чему равна сумма $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$?

11. Найти все трёхзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

12. Три прямые делят квадрат на 7 частей. Вписать в эти части по одной цифре от 1 до 7 так, чтобы сумма цифр по одну сторону от каждой прямой равнялась сумме цифр по другую её сторону.

13. В выражении $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{abc}^1$ заменить буквы цифрами, обеспечив справедливость равенства.

14. В следующих задачах вместо букв подставьте цифры так, чтобы равенства выполнялись. Одним и тем же буквам соответствуют одинаковые цифры (в пределах каждой задачи), разным — разные.

а) КТО + КОТ = ТОК б) ОДИН + ОДИН = МНОГО

$$\begin{array}{r}
 \text{в) } + \left\{ \begin{array}{r} \text{Д} \\ \text{А Д} \\ \text{Л А Д} \\ \text{К Л А Д} \\ \text{О К Л А Д} \\ \text{Д О К Л А Д} \\ \hline 9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} \text{К Н И Г А} \\ \text{К Н И Г А} \\ \text{К Н И Г А} \\ \hline \text{Н А У К А} \end{array}
 \end{array}$$

¹ Записанные подряд буквы с чертой над ними следует читать как многозначное число. Например, $\overline{AB} = 10A + B$, $\overline{BDB} = 100B + 10D + B$.

ГЛАВА 1.2

УМНОЖЕНИЕ

*Умножить — значит умножить,
а умножить — умножить.*

Ф. Кривин. “Карманная школа”

ЗАДАЧИ

1.2.1. Представить число 203 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы их произведение также было равно 203.

1.2.2. Представить число 231 в виде произведения натуральных чисел так, чтобы сумма квадратов этих чисел также равнялась 231. Можно ли выполнить аналогичную операцию для числа 187?

1.2.3. Из прямоугольных полосок со сторонами 1 см и 5 см сложен прямоугольник. Доказать, что длина одной из сторон этого прямоугольника кратна пяти.

1.2.4. Найти три последние цифры произведения $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 17 \times 18$.

1.2.5. Составить из цифр 1, 2, 3, ..., 8, 9 три трёхзначных числа так, чтобы их произведение оказалось максимально возможным.

1.2.6. Составить из цифр 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9 пять двузначных чисел так, чтобы их произведение оказалось максимально возможным.

1.2.7. Доказать, что произведение цифр двузначного числа меньше самого числа.

1.2.8. Доказать, что произведение цифр любого числа меньше самого числа.

1.2.9. Двузначное число, умноженное на 3 или на множитель, кратный 3, но не превышающий некоторого числа, даёт произведение, составленное из трёх одинаковых цифр.

При сложении этих цифр получается множитель. Какое это число и каков наибольший множитель, удовлетворяющий условию задачи?

1.2.10. В трёхзначном числе зачеркнули среднюю цифру и получили число, в 6 раз меньшее исходного. Найти исходное трёхзначное число.

1.2.11. В трёхзначном числе зачеркнули первую цифру слева, затем полученное двузначное число умножили на 7 и получили исходное трёхзначное число. Найдите это число.

1.2.12. Пятизначное число преобразовано в шестизначное двояко: первый раз единица дописана справа, второй раз — слева. Первое шестизначное число втрое больше второго. Найти исходное число.

1.2.13. В следующих примерах заменить буквы цифрами, обеспечив верность равенств: а) $\overline{AB} \times \overline{BA} = \overline{BDB}$; б) $\overline{AB} \times A = \overline{CCC}$ ($\overline{AB} = 10A + B$; $\overline{BDB} = 100B + 10D + B$).

1.2.14. Авиалинию, связывающую пункты A и B , обслуживают самолёты трёх типов. Каждый самолёт первого, второго и третьего типов может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолёты, используемые на линии, могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найдите количества используемых на линии самолётов каждого типа, если их общее число не превосходит 8.

1.2.15. “Произведение трёх натуральных чисел равно 36, — сказал Петя. — Что это за числа?” Коля, подумав, ответил: “Данных недостаточно”. Тогда Петя сообщил сумму этих чисел. “Всё равно данных недостаточно” — ответил Коля. Чему была равна сумма, сообщённая Петей?

1.2.16. Несколько факультетов решили провести соревнование, поделив затраты поровну. Перед соревнованиями оказалось, что 4 факультета отказались от участия. Поэтому остальным факультетам пришлось дополнительно внести по 4 тыс. руб. Найти общий объём затрат S тыс. руб., если $20 \leq S \leq 30$.

РЕШЕНИЯ, ПОЯСНЕНИЯ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Задача 1.2.1.

Представим условие задачи в следующем виде: разложить число 203 на множители так, чтобы их сумма равнялась 203.

Поскольку сумма двух или нескольких натуральных чисел, отличных от 1, всегда меньше их произведения (исключая случай $2 + 2 = 2 \times 2$), очевидно, что некоторое число множителей в разложении должно быть равно 1. Используя такой приём, можно довести сумму сомножителей до нужной величины, не меняя при этом их произведения.

Итак, задача сводится к разложению на множители числа 203. Будем руководствоваться следующим правилом: среди делителей составного числа обязательно есть числа, меньшие, чем корень квадратный из этого числа (обоснование этого правила дано в следующей главе).

$15^2 = 225 > 203$, поэтому ищем делители числа 203 среди простых чисел, меньших 15. Поскольку ни один из “табельных” признаков делимости (на 2, 3, 5, 11) данному числу не свойствен, остаются два простых числа: 7 и 13.

$203 : 7 = 29$, поэтому $203 = 29 \times 7 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1$ (всего 167 единиц); $29 + 7 + 167 = 203$.

Число 203 имеет два простых делителя, поэтому найденное решение — единственное.

Задача 1.2.2.

а) Решение аналогично решению задачи 1.2.1.

Разложим число 231 на простые множители: $231 = 3 \times 7 \times 11$. Поскольку $3^2 + 7^2 + 11^2 = 179$ и $231 - 179 = 52$, то для получения результата 231 при сложении квадратов делителей этого числа следует дополнить полученную сумму слагаемым 1^2 , повторенным 52 раза. Произведение слагаемых при этом останется прежним: $231 = 3 \times 7 \times 11 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1$ (всего 52 единицы); $231 = 3^2 + 7^2 + 11^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2$ (всего 52 единицы).

б) $187 = 11 \times 17$; $11^2 + 17^2 = 121 + 289 = 410 > 187$ — сумма квадратов делителей числа 187 больше самого числа, задача не имеет решения.

Вывод. Задача имеет решение, если сумма квадратов простых делителей данного числа меньше самого числа. В случае, если число равно произведению двух простых сомножителей, задача не имеет решения, поскольку один из сомножителей не меньше корня квадратного из этого числа и, следовательно, квадрат этого сомножителя больше или равен самому числу.

А. Дано число $c = ab$ (1). Докажем, что $c < a^2 + b^2$ (2).

Подставим значение c из (1) в (2): $a^2 + b^2 > ab$ (3). Разделим обе части полученного неравенства (3) на ab : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 1$ (4).

Неравенство (4) справедливо для любых положительных значений a и b , поскольку справедливо более сильное неравенство: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, или $(a - b)^2 \geq 0$.

Задача 1.2.3.

Площадь каждой прямоугольной полоски равна 5 см^2 . Следовательно, площадь прямоугольника, составленного из этих полосок, кратна 5. Но площадь прямоугольника равна произведению его сторон. Поскольку произведение кратно 5, то по меньшей мере один из сомножителей (т. е. длина одной из сторон) кратен 5, что и требовалось доказать.

Задача 1.2.4.

В приведённом выражении число 5 трижды встречается как сомножитель — в числах 5, 10 и 15, а число 2 — более трёх раз. Поэтому произведение первых восемнадцати натуральных чисел кратно 10^3 , т. е. оканчивается тремя нулями.

Задача 1.2.5.

Чтобы три искоемых числа оказались наибольшими (необходимое условие получения максимального произведения), следует в разряды сотен этих чисел вписать наибольшие цифры: 7, 8 и 9, в разряды десятков — цифры 4, 5 и 6, в разряды единиц — цифры 1, 2 и 3.

Очевидно, что наибольшие цифры десятков и единиц (6 и 3 соответственно) следует поместить в числе с минимальной цифрой сотен (7) — в этом случае мы получим максимальные результаты, умножая полученное число на другие два числа с цифрами 8 и 9 в разрядах сотен. Следующие две меньшие по величине цифры десятков и единиц вписываем в число с цифрой сотен 8 и, наконец, две наименьшие цифры десятков и единиц — в число с цифрой сотен 9. Искомые числа: 941, 852, 763. Произведение этих чисел равно 611 721 516.

А. Пусть для чисел a, b, c, d выполняются неравенства: $a > b > c > d$. Докажем справедливость неравенства:

$$(10a + d)(10b + c) > (10a + c)(10b + d).$$

Раскрыв скобки и перенеся члены неравенства из правой части в левую, получим:

$$\begin{aligned}ac + bd - ad - bc &> 0; & a(c - d) - b(c - d) > 0; \\(a - b)(c - d) &> 0.\end{aligned}$$

Справедливость полученного неравенства очевидна, следовательно, справедливо и исходное неравенство.

Задача 1.2.6.

Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, разбиваем все цифры на две группы: цифры десятков искомых чисел — 9, 8, 7, 6, 5, цифры единиц — 4, 3, 2, 1, 0. Строим двузначные числа, придерживаясь принципа: большим цифрам десятков соответствуют меньшие цифры единиц и наоборот: $90 \times 81 \times 72 \times 63 \times 54 = 1\,785\,641\,760$.

Задача 1.2.7.

Двузначное число, представленное в виде суммы разрядных слагаемых, равно произведению числа десятков на 10 плюс число единиц. Очевидно, эта сумма больше, чем произведение числа десятков на число единиц (последнее меньше десяти).

Задача 1.2.8.

Заметим, что произведение двух цифр всегда меньше 100, произведение трёх цифр меньше 1000 и т. д. Пусть выбранное нами число — четырёхзначное. В таком случае оно больше, чем произведение числа тысяч на тысячу, и подавно больше, чем произведение числа тысяч на произведение трёх остальных цифр (которое меньше 1000).

Любое n -значное число больше, чем $a \cdot 10^{n-1}$, где a — первая цифра этого числа (предполагается, что ни одна из цифр этого числа не есть нуль, иначе произведение цифр равно нулю и оно меньше самого числа). Но, как было показано выше, произведение $(n - 1)$ цифр числа меньше, чем 10^{n-1} . Следовательно, умножив это произведение на a , получим число, заведомо меньшее, чем $a \cdot 10^{n-1}$, и подавно меньшее, чем данное n -значное число.

Задача 1.2.9.

Любое трёхзначное число, в записи которого трижды повторяется одна и та же цифра, равно произведению числа 111 на однозначное число, записанное той же цифрой, которая использована для записи трёхзначного числа. Например, $222 = 111 \times 2$, $555 = 111 \times 5$ и т. п.

Число 111 имеет 2 простых делителя: 3 и 37. Следовательно, 37 и есть искомое двузначное число. Умножая 37 на следующее, большее число, кратное 3, мы добавляем к предыдущему результату 111 и вновь получаем трёхзначное число, все цифры которого одинаковы:

$$37 \times 6 = 37 \times 3 \times 2 = 111 \times 2 = 222,$$

$$37 \times 9 = 37 \times 3 \times 3 = 111 \times 3 = 333 \text{ и т.д.}$$

Наибольшее трёхзначное число, все цифры которого одинаковы: $999 = 111 \times 9 = 37 \times 3 \times 9 = 37 \times 27$.

Следовательно, 27 — наибольшее число, дающее при умножении на 37 трёхзначное произведение, все цифры которого одинаковы.

Задача 1.2.10.

Заметим, что, умножив на 6 двузначное число, превышающее 19, мы получим результат, в котором цифра сотен меньше цифры десятков исходного числа. Следовательно, цифра сотен искомого числа, как и цифра десятков полученного двузначного числа, равна 1. Цифра единиц двузначного числа (она же цифра единиц искомого трёхзначного числа) больше 6, т. к. $16 \times 6 = 96$, а произведение полученного двузначного числа на 6 — число трёхзначное. Из трёх оставшихся цифр: 7, 8 и 9 — отвечает условию цифра 8, она сохраняется в произведении в качестве цифры единиц. Итак, получено двузначное число 18. Искомое трёхзначное число равно $18 \times 6 = 108$.

А. Обозначим искомое трёхзначное число $100a + 10b + c$.

После вычёркивания средней цифры получим двузначное число $10a + c$. Согласно условию, $100a + 10b + c = 6 \cdot (10a + c)$, или после преобразования: $8a + 2b = c$. Из трёхзначности искомого числа следует $a \neq 0$. Поскольку $c \leq 9$, то $a = 1$, $b = 0$. Следовательно, $c = 8$ и искомое число равно 108.

Задача 1.2.11.

Способ 1. Последняя цифра двузначного числа при умножении этого числа на 7 становится последней цифрой полученного трёхзначного произведения. Свойством повторяться в цифре единиц произведения при умножении на 7 обладают цифры 0 и 5. Пусть цифра единиц двузначного числа (она же цифра единиц исходного трёхзначного числа) равна 0. Тогда цифра десятков этого числа равна 5; только в этом случае она повторится в трёхзначном произведении в разряде десятков. Исходное число равно $50 \times 7 = 350$.

Если предположить, что цифра единиц двузначного числа равна 5, то при умножении на 7 в разряд десятков переходит 3. Остаётся найти такую цифру десятков двузначного числа, умножив которую на 7 и добавив к произведению 3, получим эту же цифру в разряде десятков трёхзначного произведения. Однако это невозможно: если предположить, что искомая цифра — чётная, то, умножив её на 7 и добавив 3, получим результат, оканчивающийся нечётной цифрой, и наоборот. Следовательно, наше допущение неверно, задача имеет только одно решение.

Способ 2. Умножив некоторое двузначное число на 7, мы получили трёхзначное число, равное сумме нескольких сотен и этого двузначного числа. С другой стороны, умножить число на 7 — значит прибавить к нему это же число ещё 6 раз. Следовательно, двузначное число при умножении на 6 даёт в произведении целое число сотен. Это двузначное число равно 50 (в разложении числа 6 на множители есть только одна двойка). Исходное трёхзначное число равно $50 \times 6 + 50 = 350$.

А. Обозначим искомое трёхзначное число $100a + 10b + c$.

После вычёркивания первой цифры получим двузначное число $10b + c$.

Согласно условию, $100a + 10b + c = 7(10b + c)$. После преобразования полученное равенство примет вид: $10(5a - 3b) = 3c$. Поскольку c — число однозначное, то $c < 10$. Единственно возможные значения параметров, обеспечивающие справедливость полученного равенства, следующие: $c = 0$; $5a - 3b = 0$; $a = 3$; $b = 5$. Искомое число равно 350.

Задача 1.2.12.

Обозначим искомое число $\overline{abcde}$.

По условию $1\overline{abcde} \times 3 = \overline{abcde1}$.

$e = 7$, т. к. только 7 при умножении на 3 даёт произведение, оканчивающееся на 1. При этом цифра 2 переходит в разряд десятков.

$d = 5$, т. к. $5 \cdot 3 + 2 = 17$, и цифра 7 занимает предназначенное ей место в разряде десятков произведения.

Продолжив рассуждения, получим: $c = 8$, т. к. $8 \cdot 3 + 1 = 25$; $b = 2$, т. к. $2 \cdot 3 + 2 = 8$; $a = 4$, т. к. $4 \cdot 3 = 12$.

Искомое число равно 42857.

А. Обозначим: x — искомое число.

Дописав к этому числу цифру 1 справа, получим число $10x + 1$.

Дописав к этому числу цифру 1 слева, получим число $x + 100000$.

По условию $10x + 1 = 3(x + 100000)$. $7x = 299999$; $x = 42857$.

Задача 1.2.13.

а) $B < 3$, в противном случае первая цифра трёхзначного произведения была бы больше B , либо произведение было бы четырёхзначным (при $A > 3$).

$B \neq 1$, иначе последняя цифра произведения была бы равна A . Следовательно, $B = 2$.

Последняя цифра произведения может быть равна 2 при $A = 1$ или $A = 6$. Но при $A = 6$ произведение $\overline{AB} \times \overline{BA}$ — число четырёхзначное. Значит, $A = 1$, и искомое выражение выглядит так: $12 \times 21 = 252$.

б) Разложим полученное произведение на множители: $\overline{CCC} = C \times 111 = C \times 3 \times 37$.

Очевидно, число $\overline{AB}$ кратно 37, и оно может быть равно 37 или 74. Число A кратно 3, оно может принимать значения 3, 6, 9. Сопоставляя эти выводы, заключаем: $A = 3$, $\overline{AB} = 37$. Следовательно, $C = 1$, и искомое выражение имеет вид: $37 \times 3 = 111$.

Замечание. Представленные для расшифровки примеры — не что иное, как уравнения с тремя неизвестными. Что же позволило нам обойти незыблемое правило, согласно которому система независимых уравнений¹ определённая (т. е. имеет ограниченное число решений), если число уравнений равно числу неизвестных?

Секрет в том, что искомые величины — это цифры перемножаемых чисел и полученных произведений. Взаимосвязь этих цифр регламентирована правилами умножения, что позволило составить вспомогательные неравенства и получить в результате однозначное решение.

Задача 1.2.14.

Для удобства рассуждений обозначим x — число самолётов первого типа, y — второго типа и z — третьего типа.

Согласно условию, справедливо равенство: $27x + 12y + 5z = 88$. Третье слагаемое в приведённом выражении может оканчиваться на 5 либо на 0. Следовательно, сумма первых двух слагаемых должна оканчиваться на 3 либо на 8.

¹ Уравнения, входящие в систему, называются *независимыми*, если ни одно из них не является следствием других, т. е. не может быть получено путём тождественных преобразований других уравнений данной системы.

Наименьшее число самолётов первого и второго типов, при котором цифра единиц указанной суммы равна 3, составляет соответственно 1 и 3 самолёта: $27 \times 1 + 12 \times 3 = 63$. В этом случае число самолётов третьего типа равно $(88 - 63) : 5 = 5$. Общее число самолётов, необходимых для транспортировки указанного груза, составляет $1 + 3 + 5 = 9$, что противоречит условию.

Минимальное число самолётов, обеспечивающих цифру 8 в разряде единиц указанной суммы, составляет 2 самолёта первого типа и 2 — второго типа: $27 \times 2 + 12 \times 2 = 78$. Число самолётов третьего типа, необходимых для перевозки оставшихся контейнеров, равно $(88 - 78) : 5 = 2$. Всего задействованы 6 самолётов.

Проверка по количеству пассажиров: $2 \times 230 + 2 \times 110 + 2 \times 40 = 760$.

А. Сохранив принятые выше обозначения, запишем условие задачи в символической форме:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 230x + 110y + 40z = 760 \\ 27x + 12y + 5z = 88 \\ x + y + z \leq 8 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 23x + 11y + 4z = 76 \\ 27x + 12y + 5z = 88 \\ x + y + z \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 4x + y + z = 12 \\ x + y + z \leq 8 \end{cases} \Rightarrow 3x \geq 4, \quad x > 1; \\ \begin{cases} 115x + 55y + 20z = 380 \\ 108x + 48y + 20z = 352 \end{cases} &\Rightarrow 7x + 7y = 28, \quad x + y = 4; \\ &\begin{cases} x + y = 4 \\ x > 1 \\ x < (760 : 230 \approx 3,3). \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим два возможных варианта:

а) $x = 3, y = 1; 230 \times 3 + 110 \times 1 = 800 > 760$ — противоречит условию;

б) $x = 2, y = 2, z = 12 - (4x + y) = 2$.

Задача 1.2.15.

Результаты разложения числа 36 на три натуральных сомножителя с последующим их суммированием представим в следующей таблице:

Произведение	Сумма
$1 \times 1 \times 36 = 36$	$1 + 1 + 36 = 38$
$1 \times 2 \times 18 = 36$	$1 + 2 + 18 = 21$
$1 \times 3 \times 12 = 36$	$1 + 3 + 12 = 16$
$1 \times 4 \times 9 = 36$	$1 + 4 + 9 = 14$
$1 \times 6 \times 6 = 36$	$1 + 6 + 6 = 13$
$2 \times 2 \times 9 = 36$	$2 + 2 + 9 = 13$
$2 \times 3 \times 6 = 36$	$2 + 3 + 6 = 11$
$3 \times 3 \times 4 = 36$	$3 + 3 + 4 = 10$

В приведённой таблице каждая из сумм встречается один раз, кроме суммы 13, полученной дважды. Очевидно, только информация о такой сумме не даёт оснований для однозначного ответа.

Задача 1.2.16.

Необходимо найти 2 числа (число факультетов и первоначально планируемый вклад каждого), произведение которых находится в пределах от 20 до 30 и не меняется при увеличении одного из чисел на 4 и уменьшении другого также на 4. Второе условие выполняется для чисел, разнящихся на 4. Действительно, произведение не изменится, если сомножители поменяются местами. Покажем, что только такое соотношение искомых величин удовлетворяет условию. Представим прямоугольник, стороны которого численно равны искомым величинам. Сумма этих величин равна полупериметру прямоугольника, а произведение — его площади. Поскольку при изменении указанных величин их сумма и произведение остались прежними, воспользуемся следующим правилом: *из прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат; площадь прямоугольника тем больше, чем меньше разность его сторон (т.е. чем ближе форма его к квадратной).** Применительно к условию данной задачи следует рассмотреть три возможных случая, заведомо исключив ситуацию, при которой большая из величин возрастет, а меньшая станет еще меньше (в этом случае площадь прямоугольника, согласно приведённому правилу, уменьшится, что противоречит условию).

а) Разность сторон прямоугольника равна 4. Если большую из сторон уменьшить на 4, а меньшую на столько же