

В.А. ИЛЬИН, Э.Г. ПОЗНЯК

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В.А. ИЛЬИН, Э.Г. ПОЗНЯК

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Рекомендовано Министерством образования
Российской Федерации в качестве учебника
для студентов физических специальностей
и специальности "Прикладная математика"*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2012

УДК 514.122
ББК 22.151.5
И 46

Учебник удостоен
Государственной премии СССР за 1980 год

Ильин В. А., Позняк Э. Г. **Аналитическая геометрия:** Учеб. Для вузов. — 7-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 224 с. — (Курс высшей математики и математической физики.) — ISBN 978-5-9221-0511-8.

Учебник написан на основе опыта преподавания авторов в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Первое издание вышло в 1968 г., второе (1971 г.) и третье (1981 г.) издания стереотипные, четвертое издание (1988 г.) было дополнено материалом, посвященным линейным и проективным преобразованиям.

Для студентов физических и физико-математических факультетов и факультетов вычислительной математики и кибернетики университетов.

Ил. 85.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов серии	9
Предисловие	10
Введение	11
Глава 1. Системы координат. Простейшие задачи аналитической геометрии	13
§ 1. Декартовы координаты на прямой	13
1. Направленные отрезки на оси (13). 2. Линейные операции над направленными отрезками. Основное тождество (14). 3. Декартовы координаты на прямой (15).	
§ 2. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве	16
1. Декартовы координаты на плоскости (16). 2. Декартовы координаты в пространстве (16).	
§ 3. Простейшие задачи аналитической геометрии	17
1. Понятие направленного отрезка в пространстве. Проекция направленного отрезка на ось (17). 2. Расстояние между двумя точками (18). 3. Деление отрезка в данном отношении (19). 4. Бариецентрические координаты (21).	
§ 4. Полярные, цилиндрические и сферические координаты	22
1. Полярные координаты (22). 2. Цилиндрические координаты (23). 3. Сферические координаты (24).	
Дополнение к главе 1. Определители второго и третьего порядков	24
1. Понятие матрицы и определителя второго порядка (24). 2. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными (25). 3. Определители третьего порядка (24). 4. Свойства определителей (29). 5. Алгебраические дополнения и миноры (31). 6. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными с определителем, отличным от нуля (34). 7. Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными (36). 8. Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными (38). 9. Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными с определителем, равным нулю (39).	
Глава 2. Векторная алгебра	42
§ 1. Понятие вектора и линейные операции над векторами	42
1. Понятие вектора (42). 2. Линейные операции над векторами (43). 3. Понятие линейной зависимости векторов (48). 4. Линейные комбинации двух векторов (49). 5. Линейные комбинации трех векторов (50). 6. Линейная зависимость четырех векторов (52). 7. Понятие базиса. Аффинные координаты (53). 8. Проекция вектора на ось и ее свойства (55). 9. Декартова прямоугольная система координат как частный случай аффинной системы координат (57).	
§ 2. Скалярное произведение двух векторов	59
1. Определение скалярного произведения (59). 2. Геометрические свойства скалярного произведения (60). 3. Алгебраические свойства скалярного произведения (61). 4. Выражение скалярного произведения в декартовых координатах (62).	
§ 3. Векторное и смешанное произведения векторов	63
1. Правые и левые тройки векторов и системы координат (63). 2. Определение векторного произведения двух векторов (64). 3. Геометрические свойства векторного произведения (65). 4. Смешанное произведение трех векторов (67). 5. Алгебраические свойства векторного произведения (68). 6. Выражение векторного произведения в декартовых координатах (72). 7. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах (73). 8. Двойное векторное произведение (74).	

Глава 3. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости и в пространстве	76
§ 1. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости	76
§ 2. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве	79
1. Общие формулы преобразования (79). 2. Выяснение геометрического смысла. Углы Эйлера (81).	
§ 3. Линейные преобразования	83
1. Понятие линейных преобразований плоскости (83). 2. Аффинные преобразования плоскости (84). 3. Основное свойство аффинных преобразований плоскости (86). 4. Основной инвариант аффинного преобразования плоскости (88). 5. Аффинные преобразования пространства (89). 6. Ортогональные преобразования (90).	
§ 4. Проективные преобразования	92
Глава 4. Уравнение линии на плоскости. Уравнения поверхности и линии в пространстве	95
§ 1. Уравнение линии на плоскости	95
1. Понятие об уравнении линии (95). 2. Параметрическое представление линии (96). 3. Уравнение линии в различных системах координат (98). 4. Два типа задач, связанных с аналитическим представлением линии (100). 5. Классификация плоских линий (100). 6. О пересечении двух линий (102).	
§ 2. Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве	102
1. Понятие об уравнении поверхности (102). 2. Уравнения линии в пространстве (104). 3. Цилиндрические и конические поверхности (104). 4. Параметрические уравнения линии и поверхности в пространстве (107). 5. Классификация поверхностей (108). 6. О пересечении поверхностей и линий в пространстве (109). 7. Заключительные замечания (110).	
Глава 5. Линейные образы	111
§ 1. Различные виды уравнения прямой на плоскости	111
1. Общее уравнение прямой (111). 2. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках (113). 3. Каноническое уравнение прямой (114). 4. Параметрические уравнения прямой (115). 5. Прямая с угловым коэффициентом (115). 6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (116). 7. Нормированное уравнение прямой. Отклонение точки от прямой (118). 8. Уравнение пучка прямых (121).	
§ 2. Некоторые задачи на прямую линию на плоскости	123
1. Нахождение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ и составляющей заданный угол φ с данной прямой $y = k_1x + b_1$ (123). 2. Нахождение биссектрис углов, образованных данными прямыми (124). 3. Условия, при которых данная прямая пересекает данный отрезок AB (124). 4. Определение местоположения данной точки M и начала координат O относительно углов, образованных двумя данными прямыми (124). 5. Условие пересечения трех прямых в одной точке (125). 6. Нахождение прямой, проходящей через точку пересечения двух данных прямых и удовлетворяющей еще одному условию (126).	
§ 3. Различные виды уравнения плоскости	127
1. Общее уравнение плоскости (127). 2. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках (129). 3. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей (130). 4. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой (131). 5. Нормированное уравнение плоскости. Отклонение точки от плоскости (132). 6. Пучки и связи плоскостей (134).	
§ 4. Прямая линия в пространстве	135
1. Канонические уравнения прямой в пространстве (135). 2. Уравнения прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (137). 3. Параметри-	

ческие уравнения прямой в пространстве (137). 4. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых (137). 5. Условие принадлежности двух прямых к одной плоскости (138). 6. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости (138). 7. Условия принадлежности прямой $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (139). 8. Связка прямых (139).	
§ 5. Некоторые задачи на прямую и плоскость в пространстве	140
1. Условие пересечения трех плоскостей в одной и только в одной точке (140). 2. Нахождение биссектральных плоскостей двугранного угла, образованного двумя данными плоскостями (140). 3. Условия, при которых данная плоскость пересекает данный отрезок AB (141). 4. Определение местоположения двух данных точек A и B относительно двугранных углов, образованных данными плоскостями (141). 5. Уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (141). 6. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной заданной плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (141). 7. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной заданной прямой $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ (141).	
8. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ и через заданную не лежащую на этой прямой точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (142). 9. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ и параллельной другой данной прямой $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ (142). 10. Уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую L_1 и перпендикулярной заданной плоскости π (143). 11. Уравнения перпендикуляра, опущенного из заданной точки M_0 на данную прямую L_1 (143). 12. Нахождение расстояния от данной точки M_0 до данной прямой L_1 (143). 13. Нахождение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым L_1 и L_2 (143). 14. Нахождение кратчайшего расстояния между двумя данными скрещивающимися прямыми L_1 и L_2 (143).	
Глава 6. Линии второго порядка	144
§ 1. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы	144
1. Эллипс (144). 2. Гипербола (147). 3. Парабола (148).	
§ 2. Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям	149
1. Исследование формы эллипса (150). 2. Исследование формы гиперболы (151). 3. Исследование формы параболы (155).	
§ 3. Директрисы эллипса, гиперболы и параболы	155
1. Эксцентриситет эллипса и гиперболы (156). 2. Директрисы эллипса и гиперболы (157). 3. Определение эллипса и гиперболы, основанное на их свойстве по отношению к директрисам (161). 4. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения (164). 5. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы (165).	
§ 4. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе	167
1. Уравнения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе (167). 2. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы (168).	
§ 5. Кривые второго порядка	169
1. Преобразование коэффициентов уравнения линии второго порядка при переходе к новой декартовой системе координат (170). 2. Инварианты уравнения линии второго порядка. Понятие типа линии второго порядка (172). 3. Центр линии второго порядка (175). 4. Стандартное упрощение любого уравнения линии второго порядка путем поворота осей (176). 5. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка ($I_2 \neq 0$). Классификация центральных линий (177). 6. Упрощение уравнения линии параболического типа ($I_2 = 0$). Классификация линий параболического типа (180). 7. Распадающиеся кривые второго порядка (183).	

Глава 7. Поверхности второго порядка	184
§ 1. Понятие поверхности второго порядка	184
1. Преобразование коэффициентов уравнения поверхности второго порядка при переходе к новой декартовой системе координат (185). 2. Инварианты уравнения поверхности второго порядка (186). 3. Центр поверхности второго порядка (187). 4. Стандартное упрощение любого уравнения поверхности второго порядка путем поворота осей (187).	
§ 2. Классификация поверхностей второго порядка	189
1. Классификация центральных поверхностей (189). 2. Классификация нецентральных поверхностей второго порядка (192).	
§ 3. Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям	194
1. Эллипсоид (194). 2. Гиперboloиды (196). 3. Параболоиды (198). 4. Конус и цилиндры второго порядка (200). 5. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка (202).	
Приложение. Проблемы оснований геометрии и обоснования метода координат	205
§ 1. Аксиомы элементарной геометрии	205
1. Аксиомы принадлежности (205). 2. Аксиомы порядка (207). 3. Аксиомы конгруэнтности (209). 4. Аксиомы непрерывности (211). 5. Обоснование метода координат (211). 6. Аксиома параллельности (216).	
§ 2. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Евклида	217
§ 3. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского	220
§ 4. Заключительные замечания о проблемах аксиоматики	222

ОТ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

Данный выпуск серии представляет собой учебник по курсу аналитической геометрии. Кроме традиционно излагаемого материала, он содержит изложение некоторых вопросов, находящих применение в физике и в теоретической механике (понятие о барицентрических координатах, выяснение роли углов Эйлера в вопросах преобразования координат, представление произвольного преобразования в виде трансляции и одного поворота в пространстве, оптические свойства кривых второго порядка и т.п.).

Представляет интерес и приложение, содержащее аксиоматику Гильберта, обоснование метода координат и дающее представление о неевклидовой геометрии.

А. Тихонов, В. Ильин, А. Свешников

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла на основе лекций, читавшихся авторами на физическом факультете МГУ в течение ряда лет.

Отметим некоторые особенности изложения. Во-первых, отметим, что по всей книге идет параллельное рассмотрение случаев плоскости и пространства.

Весьма подробно излагается векторная алгебра. При ее изложении сразу же вводится понятие линейной зависимости векторов, и на его основе устанавливается возможность однозначного разложения вектора по аффинному базису. Отличаются от общепринятых доказательства распределительного свойства векторного произведения и формулы для двойного векторного произведения.

В связи с потребностями теоретической механики детально рассматривается преобразование декартовых прямоугольных координат. Выясняется роль углов Эйлера и устанавливается, что, каковы бы ни были два базиса одной ориентации, один из них может быть преобразован в другой посредством параллельного переноса и одного поворота вокруг некоторой оси в пространстве.

При описании линейных образов, наряду с изложением традиционно-теоретического материала, рассмотрено большое число задач идейного характера. Нам кажется, что разбор этих задач принесет пользу студентам, приступающим к упражнениям.

Не оставлены без внимания и имеющие прикладной характер вопросы теории образов второго порядка (оптические свойства, полярные уравнения и т.п.).

Приложение к книге содержит материал, не входящий в традиционные курсы аналитической геометрии. Здесь дается представление об аксиоматике Гильберта. Проводится обоснование метода координат, дается представление о системе разворачивания основных геометрических понятий, об евклидовой и неевклидовой геометриях и о доказательствах их непротиворечивости.

По программе, действующей в настоящее время, этот материал не входит ни в один математический курс. Тем не менее этот материал актуален не только с точки зрения логических принципов построения геометрии, но и для понимания ряда разделов современной физики.

При написании этой книги мы широко пользовались советами и дружеской критикой А.Н. Тихонова и А.Г. Свешникова, которым приносим свою глубокую благодарность.

Нам хочется также поблагодарить Н.В. Ефимова и А.Ф. Леонтьева за прочтение рукописи и сделанные ими замечания.

1968 г.

В. Ильин, Э. Позняк

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия имеет своей задачей изучение свойств геометрических объектов при помощи аналитического метода.

В основе этого метода лежит так называемый *метод координат*, впервые систематически примененный Декартом ¹⁾.

Основные понятия геометрии (точки, прямые линии и плоскости) относятся к числу так называемых *начальных* понятий. Эти понятия можно описать, но всякая попытка дать определение каждого из этих понятий неизбежно сведется к замене определяемого понятия ему эквивалентным. С научной точки зрения логически безупречным методом введения указанных понятий является *аксиоматический метод*, в развитии и завершении которого величайшая заслуга принадлежит Гильберту ²⁾.

Аксиоматический метод излагается в Приложении в конце настоящей книги. Там дается представление о всей системе аксиом геометрии и о так называемой *неевклидовой геометрии*, к которой приводит замена одной из аксиом (так называемой *аксиомы параллельности*) утверждением, ее отрицающим.

Там же выясняется вопрос о непротиворечивости как евклидовой, так и неевклидовой геометрии и устанавливается, что конкретной реализацией совокупности объектов, удовлетворяющих аксиомам геометрии, является введение точек как всевозможных упорядоченных троек (x, y, z) вещественных чисел, прямых — как множества троек (x, y, z) , удовлетворяющих системе двух линейных уравнений, и плоскостей — как множества троек (x, y, z) , удовлетворяющих одному линейному уравнению.

Аксиоматический метод закладывает фундамент и для лежащего в основе аналитической геометрии метода координат. Ради простоты рассмотрим вопрос о введении координат на прямой. Возможность введения координат на прямой основывается на возможности *установления взаимно однозначного соответствия между множеством всех точек прямой и множеством всех вещественных чисел*. Доказательство возможности установления такого соответствия базируется на аксиомах геометрии и на аксиомах (свойствах) множества вещественных чисел ³⁾ и приводится в Приложении к настоящей книге.

¹⁾ Рене Декарт — великий французский математик и философ (1596–1650).

²⁾ Давид Гильберт — великий немецкий математик (1862–1943).

³⁾ Свойства вещественных чисел и аксиоматический метод введения множества вещественных чисел излагаются в гл. 2 и в Приложении к выпуску 1 настоящего курса.

Таким образом, в Приложении к настоящей книге читатель найдет обоснование как системы развертывания основных геометрических понятий, так и лежащего в основе аналитической геометрии метода координат.

Метод координат представляет собой глубокий и мощный аппарат, позволяющий привлекать для исследования геометрических объектов методы алгебры и математического анализа.

ГЛАВА 1

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой главе вводятся декартовы координаты ¹⁾ на прямой, на плоскости и в пространстве. Рассматриваются простейшие задачи аналитической геометрии (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении). Дается понятие о других системах координат (полярных, цилиндрических и сферических).

§ 1. Декартовы координаты на прямой

1. Направленные отрезки на оси. Прямую линию ²⁾ с указанным на ней направлением будем называть *осью*. Отрезок на оси называется *направленным*, если указано, какая из его граничных точек является началом и какая — концом. Будем обозначать направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B символом $\overrightarrow{AB}$ (на рис. 1.1 изображены направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$). Мы будем рассматривать также и так называемые *нулевые направленные отрезки*, у которых начало и конец совпадают.

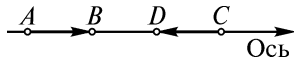


Рис. 1.1

С каждым направленным отрезком сопоставляется его числовая характеристика — так называемая *величина направленного отрезка*. *Величиной* $\overrightarrow{AB}$ направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка $\overrightarrow{AB}$, взятой со знаком плюс, если направление $\overrightarrow{AB}$ совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если направление $\overrightarrow{AB}$ противоположно направлению оси. Величины всех нулевых направленных отрезков считаются равными нулю.

¹⁾ *Координаты* (от латинских слов *co* — совместно, *ordinatus* — упорядоченный, определенный) — числа, заданием которых определяется положение точки на прямой, на плоскости или в пространстве (соответственно на линии или на поверхности). Заслуга введения *метода координат*, с помощью которого задачи геометрии могут быть истолкованы на языке математического анализа, и, наоборот, факты анализа могут приобрести геометрическое толкование, принадлежит французскому ученому Р. Декарту.

²⁾ В Приложении в конце этой книги рассматривается аксиоматическое введение основных геометрических понятий (точек, прямых, плоскостей). Кроме того, в этом же Приложении устанавливается связь между геометрическим понятием *прямой линии* и понятием *числовой оси* (см. вып. 1 «Основы математического анализа»).

2. Линейные операции над направленными отрезками. Основное тождество. Предварительно определим равенство направленных отрезков. Направленные отрезки мы будем перемещать вдоль оси, на которой они лежат, сохраняя при этом их длину и направление¹⁾.

Два ненулевых направленных отрезка называются равными, если при совмещении начал этих отрезков совпадают и их концы. Любые два нулевых направленных отрезка считаются равными.

Очевидно, необходимым и достаточным условием равенства двух направленных отрезков на данной оси является равенство величин этих отрезков.

Линейными операциями над направленными отрезками будем называть операции сложения таких отрезков и умножения направленного отрезка на вещественное число.

Перейдем к определению этих операций.

Для определения с у м м ы направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ совместим начало C отрезка $\overline{CD}$ с концом B отрезка $\overline{AB}$ (рис. 1.2). Полученный при этом направленный отрезок $\overline{AD}$ называется *суммой* направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ и обозначается символом $\overline{AB} + \overline{CD}$.

Справедлива следующая *основная теорема*.

Теорема 1.1. *Величина суммы направленных отрезков равна сумме величин слагаемых отрезков.*

Доказательство. Пусть хотя бы один из отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ является нулевым. Если, например, отрезок $\overline{CD}$ нулевой, то сумма $\overline{AB} + \overline{CD}$ совпадает с отрезком $\overline{AB}$, и утверждение теоремы справедливо. Пусть теперь оба отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ ненулевые. Совместим начало C отрезка $\overline{CD}$ с концом B отрезка $\overline{AB}$. Тогда $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD}$. Нам нужно доказать справедливость равенства $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD}$. Рассмотрим случай, когда оба отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ направлены в одну сторону (рис. 1.2). В этом случае длина отрезка $\overline{AD}$ равна сумме длин отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ и, кроме того, направление отрезка $\overline{AD}$ совпадает с направлением каждого из отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Поэтому интересующее нас равенство $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD}$ справедливо. Рассмотрим, наконец, еще один возможный случай, когда отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ направлены в противоположные стороны (рис. 1.3).

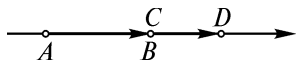


Рис. 1.2

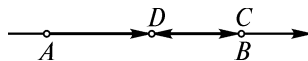


Рис. 1.3

В этом случае величины отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ имеют разные знаки, и поэтому длина отрезка $\overline{AD}$ равна $|\overline{AB} + \overline{CD}|$. Так как направление отрезка $\overline{AD}$ совпадает с направлением наибольшего по длине из отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$,

¹⁾ Вопрос о возможности перемещения отрезков связан с аксиомами конгруэнтности (см. Приложение в конце книги и, в частности, сноску на с. 209).

то знак величины отрезка $\overline{AD}$ совпадает со знаком числа $AB + CD$, т.е. справедливо равенство $AB + CD = AD$. Теорема доказана.

Следствие. При любом расположении точек A, B, C на числовой оси величины направленных отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ удовлетворяют соотношению

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \quad (1.1)$$

которое называется основным тождеством.

Операция умножения направленного отрезка на вещественное число α определяется следующим образом.

Произведением направленного отрезка $\overline{AB}$ на число α называется направленный отрезок, обозначаемый $\alpha \cdot \overline{AB}$, длина которого равна произведению числа $|\alpha|$ на длину отрезка $\overline{AB}$ и направление которого совпадает с направлением отрезка $\overline{AB}$ при $\alpha > 0$ и противоположно направлению $\overline{AB}$ при $\alpha < 0$.

Очевидно, величина направленного отрезка $\alpha \cdot \overline{AB}$ равна $\alpha \cdot AB$.

3. Декартовы координаты на прямой. Декартовы координаты на прямой вводятся следующим образом. Выберем на прямой определенное направление ¹⁾ и некоторую точку O — начало координат (рис. 1.4). Кроме того, укажем единицу масштаба. Рассмотрим теперь произвольную точку M на прямой. Декартовой координатой x точки M будем называть величину направленного отрезка $\overline{OM}$.

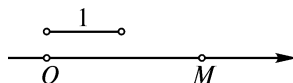


Рис. 1.4

Тот факт, что точка M имеет координату x , символически обозначают так: $M(x)$.

З а м е ч а н и е. Введение декартовых координат на прямой представляет собой один из способов, с помощью которого любой точке M прямой ставится в соответствие вполне определенное вещественное число x . Вопрос о том, исчерпывается ли при этом способе все множество вещественных чисел, т.е. будет ли указанное соответствие взаимно однозначным, положительно решается в Приложении в конце книги. (См. по этому поводу также Приложение к вып. I.)

Пусть $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — две точки на оси. В следующем утверждении устанавливается выражение величины M_1M_2 направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ через координаты x_1 и x_2 — его начала и конца.

Теорема 1.2. Величина M_1M_2 направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ равна $x_2 - x_1$, т.е.

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \quad (1.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим на оси три точки O, M_1, M_2 . Согласно теореме 1.1 справедливо равенство

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2. \quad (1.3)$$

¹⁾ Напомним, что прямая с указанным на ней направлением, называется осью.

Так как $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$, то из (1.3) вытекает нужное нам соотношение (1.2). Теорема доказана.

Следствие. Расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ может быть найдено по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|. \quad (1.4)$$

§ 2. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве

1. Декартовы координаты на плоскости. Две перпендикулярные оси на плоскости с общим началом и одинаковой масштабной единицей (рис. 1.5) образуют *декартову прямоугольную систему координат на плоскости*. Одну из указанных осей называют *осью Ox* или *осью абсцисс*, другую — *осью Oy* или *осью ординат*. Эти оси называют также *координатными осями*. Обозначим через M_x и M_y соответственно проекции произвольной точки M плоскости на оси Ox и Oy .

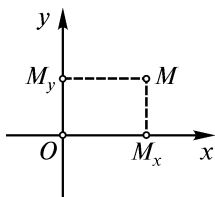


Рис. 1.5

Декартовыми прямоугольными координатами x и y точки M будем называть соответственно величины направленных отрезков $\overline{OM_x}$ и $\overline{OM_y}$.

Декартовы координаты x и y точки M называются соответственно ее *абсциссой* и *ординатой*. Тот факт, что точка M имеет координаты x и y , символически обозначают так: $M(x, y)$.

Координатные оси разбивают плоскость на четыре *квадранта*, нумерация которых указана на рис. 1.6. На этом же рисунке указана расстановка знаков координат точек в зависимости от их расположения в том или ином квадранте.

2. Декартовы координаты в пространстве. Декартовы координаты в пространстве вводятся в полной аналогии с декартовыми координатами на плоскости.

Три взаимно перпендикулярные оси в пространстве (координатные оси) с общим началом O и одинаковой масштабной единицей (рис. 1.7) образуют *декартову прямоугольную систему координат в пространстве*. Одну из указанных осей называют *осью Ox* или *осью абсцисс*, другую — *осью Oy* или *осью ординат*, третью — *осью Oz* или *осью аппликат*. Пусть M_x , M_y и M_z — проекции произвольной точки M пространства на оси Ox , Oy и Oz соответственно.

Декартовыми прямоугольными координатами x , y и z точки M будем называть соответственно величины направленных отрезков $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$ и $\overline{OM_z}$.

Декартовы координаты x , y и z точки M называются соответственно ее *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*. Тот факт, что точка M имеет координаты x , y и z , символически обозначают так: $M(x, y, z)$.

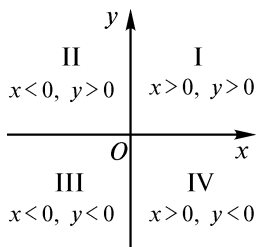


Рис. 1.6

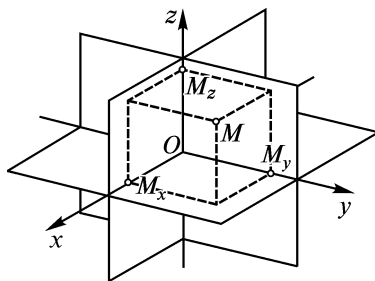


Рис. 1.7

Попарно взятые координатные оси располагаются в так называемых *координатных плоскостях* xOy , yOz и zOx (рис. 1.7). Эти плоскости разбивают пространство на восемь *октантов*. Читатель без труда выяснит расстановку знаков координат точек в зависимости от их расположения в том или ином октанте.

§ 3. Простейшие задачи аналитической геометрии

1. Понятие направленного отрезка в пространстве. Проекция направленного отрезка на ось. Отрезок в пространстве называется *направленным*, если указано, какая из его граничных точек является началом и какая — концом. Как и в п. 1 § 1 этой главы символом $\overline{AB}$ будем обозначать направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B .

Рассмотрим в пространстве направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ и ось Ox (рис. 1.8). При этом будем считать, что на оси Ox введены декартовы координаты точек.

Проекцией направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ на ось Ox ($\text{пр}_{Ox} \overline{M_1M_2}$) называется величина направленного отрезка $\overline{M_{1x}M_{2x}}$, началом M_{1x} которого служит проекция начала отрезка $\overline{M_1M_2}$, а концом M_{2x} — проекция конца отрезка $\overline{M_1M_2}$.

Пусть точки M_{1x} и M_{2x} имеют на оси Ox координаты x_1 и x_2 соответственно. Из определения $\text{пр}_{Ox} \overline{M_1M_2}$ и теоремы 1.2 вытекает справедливость соотношения

$$\text{пр}_{Ox} \overline{M_1M_2} = x_2 - x_1. \quad (1.5)$$

Установим еще одну формулу для вычисления $\text{пр}_{Ox} \overline{M_1M_2}$. Для этого перенесем направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с какой-либо точкой оси Ox (на рис. 1.8 этой точкой является точка M_{1x}). Обозначим через φ наименьший угол между направлением оси Ox и направлением отрезка $\overline{M_{1x}M_{2x}}$, полученного

указанным выше параллельным переносом отрезка $\overline{M_1M_2}$. Отметим, что угол φ заключен между 0 и π . При этом очевидно, что *угол φ острый, если направление отрезка $\overline{M_{1x}M_{2x}}$ совпадает с направлением Ox , и тупой, если направление $\overline{M_{1x}M_{2x}}$ противоположно направлению Ox* . Используя это, легко убедиться в справедливости следующей нужной нам формулы:

$$\text{пр}_{Ox} \overline{M_1M_2} = |\overline{M_1M_2}| \cos \varphi, \quad (1.6)$$

в которой $|\overline{M_1M_2}|$ обозначает длину отрезка $\overline{M_1M_2}$.

2. Расстояние между двумя точками. В этом пункте мы установим формулу для вычисления расстояния между двумя точками по известным координатам этих точек. Эта задача уже решена для случая точек на прямой в п. 3 § 1 этой главы (см. формулу (1.4)). Ради определенности подробно остановимся на случае, когда точки расположены в пространстве.

Рассмотрим в пространстве декартову систему координат $Oxyz$ и точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 1.9). Очевидно, расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между точками M_1 и M_2 , равное длине направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$, равно также длине диагонали параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям и проходят через точки M_1 и M_2 (на рис. 1.9 этот параллелепипед изображен штриховой линией). Длина параллельного оси Ox ребра этого параллелепипеда равна, очевидно, абсолютной величине проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на ось Ox , т.е., согласно формуле (1.5), равна $|x_2 - x_1|$. По аналогичным соображениям длины ребер, параллельных осям Oy и Oz , равны соответственно $|y_2 - y_1|$ и $|z_2 - z_1|$.

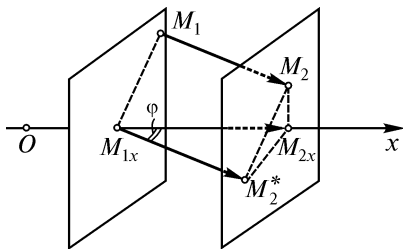


Рис. 1.8

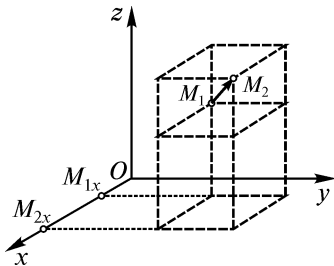


Рис. 1.9

Используя теорему Пифагора, получим следующую формулу для $\rho(M_1, M_2)$:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.7)$$

З а м е ч а н и е. Формула расстояния между двумя точками в случае их расположения в плоскости Oxy имеет следующий вид:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.8)$$

3. Деление отрезка в данном отношении. Рассмотрим в пространстве две различные точки M_1 и M_2 и прямую, определяемую этими точками. Выберем на этой прямой некоторое направление (рис. 1.10). На полученной оси точки M_1 и M_2 определяют направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$.

Пусть M — любая отличная от M_2 точка указанной выше оси. Число

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} \quad (1.9)$$

называется *отношением*, в котором точка M делит направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$. Таким образом, любая, отличная от M_2 точка M делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ в некотором отношении λ , где λ определяется равенством (1.9).

З а м е ч а н и е 1. При изменении направления на прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 , меняют знак величины всех направленных

отрезков. Поэтому отношение $\frac{M_1M}{MM_2}$ в правой части формулы (1.9) не зависит от выбора направления на прямой M_1M_2 .

Рассмотрим задачу о вычислении координат точки M , делящей отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении λ , считая известными координаты точек M_1 и M_2 и число λ , где λ не равно -1 .

Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$, и пусть в этой системе координат точки M_1 , M_2 и M имеют соответственно координаты (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) и (x, y, z) . Спроецируем точки M_1 , M_2 и M на координатные оси (на рис. 1.10 указаны лишь проекции M_{1x} , M_{2x} и M_x точек M_1 , M_2 и M на ось Ox). Очевидно, точка M_x делит направленный отрезок $\overline{M_{1x}M_{2x}}$ в отношении λ . Поэтому

$$\frac{M_{1x}M_x}{M_xM_{2x}} = \lambda. \quad (1.10)$$

Согласно теореме 1.2 $M_{1x}M_x = x - x_1$, а $M_xM_{2x} = x_2 - x$. Отсюда и из соотношения (1.10) найдем, что x равняется $\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$. Совершенно аналогично вычисляются координаты y и z точки M . Таким образом,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (1.11)$$

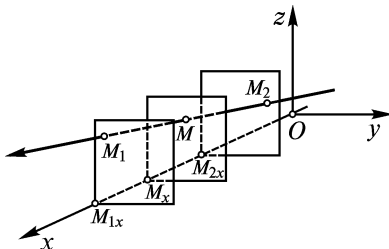


Рис. 1.10

Формулы (1.11) называются *формулами деления отрезка в данном отношении λ* .

З а м е ч а н и е 2. Очевидно, если $\lambda = 1$, то точка M делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ пополам. Получающиеся при этом из соотношений (1.11) формулы называются *формулами деления отрезка пополам*.

З а м е ч а н и е 3. Для положительных значений λ точка M лежит между точками M_1 и M_2 (в этом случае, как это видно из (1.9), отрезки $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$ одинаково направлены), а для отрицательных значений — вне отрезка M_1M_2 .

З а м е ч а н и е 4. Соотношения (1.11) имеют смысл для любых значений $\lambda \neq -1$. Этим, в частности, и объяснялось указанное ранее ограничение для значений λ .

П р и м е р. Решим задачу о *вычислении координат центра тяжести системы материальных точек*.

Используем следующие два допущения, отвечающие известным физическим предпосылкам:

1) Центр тяжести системы из двух точек M_1 и M_2 с массами соответственно m_1 и m_2 находится на отрезке M_1M_2 и делит этот отрезок в отношении $\lambda = m_2/m_1$.

2) Центр тяжести системы точек $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n$ с массами соответственно $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n$ совпадает с центром тяжести системы из двух точек, одна из которых является точкой M_n с массой m_n , а другая находится в центре тяжести системы точек $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ (с массами $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$) и имеет массу $m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$.

Из первого допущения и формул (1.11) вытекает, что координаты x , y и z центра тяжести системы из двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

с массами m_1 и m_2 равны соответственно $\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$, $\frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}$ и

$\frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}$. Поэтому следует ожидать, что координаты x , y и z центра

тяжести системы из n точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, с массами m_i могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1x_1 + \dots + m_nx_n}{m_1 + \dots + m_n}, & y &= \frac{m_1y_1 + \dots + m_ny_n}{m_1 + \dots + m_n}, \\ z &= \frac{m_1z_1 + \dots + m_nz_n}{m_1 + \dots + m_n}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В справедливости этих формул можно убедиться по индукции, если использовать второе допущение. В самом деле, пусть эти формулы справедливы для системы точек $M_1, \dots, M_{n-1}$ с массами от $m_1, \dots, m_{n-1}$. Тогда, например, для абсциссы x рассматриваемой системы точек $M_1, \dots, M_n$,

согласно второму допущению и формуле для абсциссы x системы из двух точек, получим выражение

$$x = \frac{(m_1 + \dots + m_{n-1}) \cdot \frac{m_1 x_1 + \dots + m_{n-1} x_{n-1}}{m_1 + \dots + m_{n-1}} + m_n x_n}{(m_1 + \dots + m_{n-1}) + m_n},$$

из которого сразу же вытекает первая формула (1.12). Выражения для y и z получаются аналогично.

З а м е ч а н и е. Если система точек M_i с массами m_i , расположена в плоскости Oxy , то координаты x и y центра тяжести этой системы могут быть найдены по первым двум формулам (1.12).

4. Барицентрические координаты. Формулы (1.12) используются для введения так называемых *барицентрических координат*. Рассмотрим барицентрические координаты на плоскости. В целях упрощения рассуждений будем считать, что на плоскости введены и декартовы координаты Oxy . Рассмотрим какие-либо три различные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, не лежащие на одной прямой, и любую данную точку $M(x, y)$. Выясним, *существуют ли такие три числа m_1, m_2, m_3 , удовлетворяющие условию*

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1, \quad (1.13)$$

что данная точка $M(x, y)$ будет центром тяжести системы точек M_1, M_2, M_3 с массами m_1, m_2, m_3 соответственно. Ниже мы убедимся, что при сформулированных требованиях числа m_1, m_2, m_3 определяются однозначно для каждой точки M . Они называются *барицентрическими координатами точки M относительно базисных точек M_1, M_2 и M_3 .*

Сформулированная задача о существовании чисел m_1, m_2, m_3 при условии (1.13) сводится, очевидно, к исследованию вопроса об однозначной разрешимости следующей системы трех линейных уравнений ¹⁾ относительно m_1, m_2, m_3 :

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &= 1, \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= x, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= y. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Известно, что для однозначной разрешимости квадратной системы линейных уравнений (система, у которой число уравнений равно числу неизвестных) необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был отличен от нуля (см. Дополнение к этой главе). Для рассматриваемой системы этот определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

¹⁾ Последние два уравнения этой системы представляют собой следствия первых двух соотношений (1.12) и соотношения (1.13).