

The background is a deep purple with intricate, glowing white fractal patterns that resemble branching structures or complex networks. A bright, multi-pointed starburst or sunburst pattern is centered in the lower-left quadrant, with rays extending outwards. The overall effect is one of complex, organic geometry.

Л. Ш. Гринблат

**Алгебры множеств
и комбинаторика
ультрафильтров**

УДК 510.22

ББК 22.12

Г85

Л. Ш. Гринблат

Алгебры множеств и комбинаторика ультрафильтров.

Электронное издание.

М.: МЦНМО, 2017.

144 с.

ISBN 978-5-4439-3132-6

Центральная задача настоящей монографии заключается в следующем. Пусть на некоем множестве задано не более чем счётное семейство алгебр подмножеств, и для каждой алгебры существуют подмножества, ей не принадлежащие. При каких условиях существует подмножество, не принадлежащее всем алгебрам?

Мы занимаемся также вариациями этой задачи. Если семейство алгебр конечное, мы приходим к комбинаторным задачам о конечных множествах. Если же семейство алгебр счётное, мы приходим к трудным задачам теории множеств (в монографии приведено доказательство глубокой теоремы Гитика — Шелаха) и к комбинаторике ультрафильтров.

Книга предназначена для специалистов в области математики.

L. Š. Grinblat

grinblat@ariel.ac.il

Department of Mathematics,

Ariel University, Ariel, Israel

Подготовлено на основе книги: *Л. Ш. Гринблат* Алгебры множеств и комбинаторика ультрафильтров. — М.: МЦНМО, 2016. — 144 с. ISBN 978-5-4439-1132-8.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241–08–04
<http://www.mcsme.ru>

ISBN 978-5-4439-3132-6

© Л. Ш. Гринблат, 2016

© МЦНМО, 2016

Оглавление

Глава 1. Введение	4
Глава 2. Основная идея. Основные результаты	11
Глава 3. Конечные семейства алгебр	22
Глава 4. Доказательство теоремы Гитика — Шелаха	41
Глава 5. Счётные семейства алгебр (общие теоремы)	59
Глава 6. Счётные семейства σ -алгебр и почти σ -алгебр	87
Глава 7. Некоторые задачи о множествах, не принадлежащих алгебрам	111
Литература	143

Глава 1

Введение

1.1. В 1992 году вышла монография автора [12]. В следующие годы были написаны работы автора [13–20]. (Центральный результат статьи [19] улучшен сначала в [29], а затем в [4].) В них получила развитие теория, заложенная в [12]. В настоящей монографии мы подводим итог проделанного. Итог не окончательный, так как работа над теорией, которая представляется нам интересной и красивой, продолжается. Итог не полный, так как в настоящей монографии приводятся не всё, а только наиболее существенные результаты. Некоторые из них, которые в настоящей монографии не находятся «в центре внимания», приводятся без доказательства. Есть другие результаты, которые, несомненно, находятся «в центре внимания», но также приведены без доказательства. Об этих результатах и о причинах, по которым они приведены без доказательства, говорится в конце первой главы. Если говорить об области наших исследований, то она относится к комбинаторной теории множеств. Отметим, что в наших исследованиях существенную роль играют общетопологические соображения.

1.2. В 1930 году Улам в [36] получил замечательный результат, доказательство которого очень простое.

Матрица Улама. Если мощность множества X равна $\aleph_1$, то можно построить матрицу подмножеств множества X

$$\begin{pmatrix} M_1^1 & M_2^1 & \dots & M_a^1 & \dots \\ M_1^2 & M_2^2 & \dots & M_a^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_1^k & M_2^k & \dots & M_a^k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

в которой $\aleph_0$ строк и $\aleph_1$ столбцов, и справедливо следующее¹:

- 1) $M_\alpha^k \cap M_\beta^k = \emptyset$, если $\alpha \neq \beta$;
- 2) $\#(X \setminus \bigcup_k M_\alpha^k) \leq \aleph_0$.

¹ Через $\#(M)$ обозначается мощность множества M .

Доказательство этого результата Улама в общей форме приведено в замечании 4.18.

1.3. Определение. Заданная на множестве X мера μ , значения которой конечные и неотрицательные, называется *нетривиальной*, если справедливо следующее:

- 1) $\mu(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$;
- 2) существует множество положительной меры.

1.4. Следующая теорема, принадлежащая Уламу, есть простое следствие существования матрицы Улама.

Теорема. Пусть на множестве X мощности $\aleph_1$ задана σ -аддитивная нетривиальная мера μ . Тогда существуют $\aleph_1$ попарно непересекающихся μ -неизмеримых множеств.

1.5. Определение. Заданная на множестве X мера μ называется σ -двузначной, если она σ -аддитивная, $\mu(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$, $\mu(X) = 1$ и для каждого μ -измеримого множества M или $\mu(M) = 0$, или $\mu(M) = 1$.

1.6. В 1950 году вышла статья Эрдёша [7], в которой приведён следующий результат.

Теорема Алауглу — Эрдёша. Пусть на множестве X мощности $\aleph_1$ задано счётное семейство σ -двузначных мер. Тогда существует множество, неизмеримое относительно всех этих мер.

1.7. Замечание. Доказательство теоремы Алауглу — Эрдёша с лёгкостью следует из теоремы 1.4. Понятно, что теорема Алауглу — Эрдёша справедлива, если в ней фигурируют не σ -двузначные меры, а σ -аддитивные нетривиальные меры.

1.8. Теорема Алауглу — Эрдёша даёт частичный ответ на известную среди специалистов по теории множеств проблему Улама.

Проблема Улама. Найти такое минимальное кардинальное число κ_* , что для любого семейства $\mathfrak{M}$ ($0 < \#(\mathfrak{M}) < \kappa_*$) σ -двузначных мер, заданных на множестве мощности $\aleph_1$, существует множество, неизмеримое относительно всех мер из $\mathfrak{M}$.

Улам доказал, что $\kappa_* \geq \aleph_0$. Теорема Алауглу — Эрдёша утверждает, что $\kappa_* \geq \aleph_1$. Шелах в [31] показал, что в некоторой модели $\kappa_* = \aleph_1$. Итак, теорема Алауглу — Эрдёша и результат Шелаха дают решение проблемы Улама: $\kappa_* = \aleph_1$.

1.9. В [37] Вудин получил выдающийся результат. Он показал, что в некоторой модели существует σ -двузначная мера μ , заданная на множестве X мощности $\aleph_1$, и такое семейство $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ($\#(\Lambda) = \aleph_1$)

μ -неизмеримых множеств, что

$$\{\lambda \in \Lambda \mid \mu(M_\lambda \setminus M) = 0\} \neq \emptyset$$

для каждого $M \subseteq X$, если $\mu(M) \neq 0$.

Для каждого $\lambda \in \Lambda$ определим на X σ -двухзначную меру μ_λ : $\mu_\lambda(M) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(M \cap M_\lambda) = 0$. Понятно, что для каждого подмножества множества X найдётся такое $\lambda \in \Lambda$, что это подмножество μ_λ -измеримо. Поэтому в модели, которую рассматривал Вудин, $\kappa_* = \aleph_1$.

1.10. В настоящей монографии рассматриваются более общие объекты, чем меры, — алгебры множеств. Изначально в наших публикациях мы не предполагали, что алгебра множеств содержит множество, на котором она задана. В настоящей монографии мы предполагаем, что алгебра множеств содержит множество, на котором она задана. Это ограничение является удобным, но не существенным.

Определение. Под алгеброй $\mathcal{A}$ на множестве X понимается непустая совокупность подмножеств множества X , для которой справедливо следующее:

- 1) если $M \in \mathcal{A}$, то $X \setminus M \in \mathcal{A}$;
- 2) если $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$, то $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{A}$.

Понятно, что $\emptyset, X \in \mathcal{A}$. Также понятно, что если $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$, то $M_1 \cap M_2, M_1 \setminus M_2 \in \mathcal{A}$. Будем называть σ -аддитивную алгебру σ -алгеброй.

1.11. Некоторые договорённости. Под счётным множеством будем понимать множество мощности $\aleph_0$. Через $\mathfrak{P}(M)$ обозначается, как обычно, множество всех подмножеств множества M . В современной теории множеств через $\mathbb{N}$ обозначается множество неотрицательных целых чисел. Через $\mathbb{N}^+$ будем обозначать множество натуральных чисел. Пусть $m, n \in \mathbb{N}^+$ и $m \leq n$. Тогда

$$[m, n] = \{k \in \mathbb{N}^+ \mid m \leq k \leq n\}.$$

Все алгебры, меры, фильтры и идеалы (фильтры появляются в гл. 2, а идеалы в гл. 4) рассматриваются, если не оговорено противное, на некотором абстрактном непустом множестве X . Если из контекста не следует противное, под множеством понимается подмножество множества X , или, что то же самое, элемент множества $\mathfrak{P}(X)$. Наши результаты посвящены только конечным и счётным семействам алгебр. Ниже мы будем говорить не только о семействах алгебр, но и о последовательностях алгебр. В наиболее значительных результатах, где рассматривается счётное семейство алгебр, на эти алгебры накладывается ограничение — они являются или σ -алгебрами, или почти

σ -алгебрами. (Понятие почти σ -алгебры, которое приводится ниже, было введено нами в [12].)

Мы занимаемся в основном следующим вопросом. Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство алгебр и каждая алгебра из $\mathfrak{A}$ отлична от $\mathfrak{P}(X)$. При каких условиях $\bigcup \mathfrak{A} \neq \mathfrak{P}(X)$? Или по-другому: при каких условиях $\bigcup \mathfrak{A} = \mathfrak{P}(X)$? Теорему Алауглу — Эрдёша можно сформулировать на языке нашего вопроса. Действительно, пусть $\#(X) = \aleph_1$ и рассматривается семейство σ -двузначных мер $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}^+$ рассмотрим σ -алгебру $\mathcal{A}_k = \{M \subseteq X \mid M \text{ есть } \mu_k\text{-измеримое множество}\}$. Теорема Алауглу — Эрдёша утверждает, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k \neq \mathfrak{P}(X)$.

1.12. Пусть $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ — конечная последовательность алгебр и $\mathcal{A}_k \neq \mathfrak{P}(X)$ для каждого $k \in [1, n]$. Возможно ли равенство $\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k = \mathfrak{P}(X)$? Если $n = 2$, это невозможно. (Это очень просто доказать.) А если $n \geq 3$, возможно. Приведём простой и принципиально важный пример. Он важен, потому что имеет прямое отношение к двум центральным теоремам — теоремам 2.14 и 2.15.

Пример. Для каждого нечётного числа $n \geq 3$ можно построить такие алгебры $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, что $\mathcal{A}_k \neq \mathfrak{P}(X)$ для всех $k \in [1, n]$ и $\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k = \mathfrak{P}(X)$. При этом $\bigcup \{\mathcal{A}_k \mid k \in [1, n] \setminus \{k_0\}\} \neq \mathfrak{P}(X)$ для каждого $k_0 \in [1, n]$.

Построение. Пусть $\#(X) = n$ и $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Если $k \in [1, n-1]$, то

$$\mathcal{A}_k = \{M \subseteq X \mid \text{или } \{x_k, x_{k+1}\} \subseteq M, \text{ или } \{x_k, x_{k+1}\} \cap M = \emptyset\}.$$

Положим также

$$\mathcal{A}_n = \{M \subseteq X \mid \text{или } \{x_n, x_1\} \subseteq M, \text{ или } \{x_n, x_1\} \cap M = \emptyset\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{A}_k \neq \mathfrak{P}(X)$ для всех $k \in [1, n]$. Предположим, что $M_0 \in \mathfrak{P}(X)$ и $M_0 \notin \bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k$. Тогда $\#(M_0 \cap \{x_1, x_2\}) = 1$. Пусть $M_0 \cap \{x_1, x_2\} = \{x_1\}$. Тогда $M_0 = \{x_k \in X \mid k \text{ — нечётное число}\}$. Но тогда $M_0 \in \mathcal{A}_n$. Понятно, что $\bigcup_{k=1}^{n-1} \mathcal{A}_k \neq \mathfrak{P}(X)$, так как $M_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathcal{A}_k$. $\square$

1.13. Замечание. Каждая алгебра из примера 1.12 отлична от $\mathfrak{P}(X)$ и не существуют три попарно непересекающихся множества, не принадлежащие этой алгебре. Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p\}$ — конечная последовательность алгебр, $\mathcal{A}_k \neq \mathfrak{P}(X)$ для каждого $k \in [1, p]$ и для каждой алгебры из $\mathfrak{A}$ не существуют три попарно непересекающихся множества, ей не принадлежащие. Пусть $\bigcup \mathfrak{A} = \mathfrak{P}(X)$. В силу соображений из гл. 3 получаем, что $\mathfrak{A}$ содержит подпоследовательность $\mathfrak{A}'$, где $\#(\mathfrak{A}')$ — нечётное число, не меньшее 3, и устроена она точно так же, как последовательность алгебр $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ из примера 1.12.

1.14. Поставленным выше в п. 1.11 вопросом занимались и до нас. Приведём выдержку из аннотации вышедшей в 1980 году статьи Грцегорека [21].

Пусть $\mathfrak{F}$ — такое семейство σ -алгебр на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, что для каждой алгебры $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ все одноточечные множества принадлежат $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$. Тогда $\bigcup \mathfrak{F} \neq \mathfrak{P}(X)$, если выполняется одно из следующих условий:

- 1) $\#(\mathfrak{F}) < \aleph_0$;
- 2) $\#(\mathfrak{F}) < 2^{\aleph_0}$ и $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

1.15. Отметим, что для σ -алгебры из теоремы Грцегорека существуют $\aleph_0$ попарно непересекающихся подмножеств множества $\mathbb{R}$, которые ей не принадлежат. Если же $\#(\mathbb{R}) = \aleph_1$, то для σ -алгебры из теоремы Грцегорека существуют $\aleph_1$ попарно непересекающихся подмножеств множества $\mathbb{R}$, которые ей не принадлежат. (Для доказательства последнего утверждения следует, разумеется, использовать матрицу Улама.) Уже в первой цитированной нашей работе [12] были получены более сильные результаты.

I. Пусть $n \in \mathbb{N}^+$. Существуют такие функции $\psi: [1, n] \rightarrow \mathbb{N}^+$, что если $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ — произвольная последовательность алгебр и для каждого $k \in [1, n]$ существуют $\psi(k)$ попарно непересекающихся множеств, не принадлежащих $\mathcal{A}_k$ (здесь, разумеется, идёт речь о фиксированной функции ψ), то $\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k \neq \mathfrak{P}(X)$. При этом кроме существования $\psi(k)$ попарно непересекающихся множеств, не принадлежащих $\mathcal{A}_k$, ни на алгебры $\mathcal{A}_k$, ни на X не накладываются никакие дополнительные ограничения.

II. Существуют такие функции $\psi: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$, что если $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, \dots$ — произвольная счётная последовательность σ -алгебр и для каждого $k \in \mathbb{N}^+$ существуют $\psi(k)$ попарно непересекающихся множеств, не принадлежащих $\mathcal{A}_k$ (здесь, разумеется, идёт речь о фиксированной функции ψ), то $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k \neq \mathfrak{P}(X)$. При этом кроме существования $\psi(k)$ попарно непересекающихся множеств, не принадлежащих $\mathcal{A}_k$, и существенного предположения, что алгебры суть σ -алгебры, ни на алгебры $\mathcal{A}_k$, ни на X не накладываются никакие дополнительные ограничения.

1.16. Результаты настоящей монографии разделяются на две группы: в первой рассматриваются конечные семейства алгебр, во второй — счётные семейства алгебр. Как будет показано ниже, если семейство алгебр конечное, можно предполагать, что все эти алгебры заданы на конечном множестве. Поэтому если семейство алгебр конечное, то

речь идёт о чисто комбинаторной задаче. Другое дело, когда рассматривается счётное семейство σ -алгебр или почти σ -алгебр. Тогда кроме комбинаторики существенную роль играет теория множеств.

В дальнейшем мы будем использовать символ c , которым обозначается мощность континуум. Отметим очень простой факт: если на множестве мощности c задана σ -двузначная мера μ , то существуют μ -неизмеримые множества. Действительно, пусть мера μ задана на отрезке $[0, 1]$. Предположим противное: все подмножества отрезка $[0, 1]$ суть μ -измеримые. Тогда из двух отрезков $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$ один имеет меру 1. Пусть отрезок $[0, 1/2]$ имеет меру 1. Тогда один из двух отрезков $[0, 1/4]$ и $[1/4, 1/2]$ имеет меру 1. Продолжая этот процесс, мы придём к противоречию: некоторое одноточечное множество имеет меру 1. Очевидно, что существуют $\aleph_0$ попарно непересекающихся μ -неизмеримых множеств. Сформулируем сильную и глубокую теорему, которую мы используем.

Теорема Гитика — Шелаха [10]. *Пусть на множестве мощности c задано счётное семейство σ -двузначных мер. Тогда существует множество, неизмеримое относительно всех этих мер.*

Понятно, что теорема Гитика — Шелаха есть обобщение теоремы Алауглу — Эрдёша. Также понятно, что в предположении континуум-гипотезы теорема Гитика — Шелаха есть теорема Алауглу — Эрдёша. Первое доказательство теоремы Гитика — Шелаха было метаматематическим и использовало форсинг. В настоящей монографии мы приводим чисто математическое доказательство теоремы Гитика — Шелаха, следуя Камбурелосу [24]. Другое чисто математическое доказательство теоремы Гитика — Шелаха принадлежит Фремлину [8]. Приведённое ниже доказательство теоремы Гитика — Шелаха поражает своей нетривиальностью. Источник этой нетривиальности — гениальное открытие П. Козна и выдающиеся достижения его последователей.

1.17. Скажем несколько слов о содержании следующих глав. Во второй главе приводится вначале основная идея, которая впервые появилась в нашей монографии [12] и которую мы использовали в наших последующих работах [13–20]. Затем во второй главе приводятся формулировки результатов, которые будут доказаны в дальнейшем. Этот порядок изложения необходим, так как мы сформулируем необходимые и достаточные условия, при которых объединение алгебр из семейства $\mathfrak{A}$, не совпадающих с $\mathfrak{P}(X)$, равно $\mathfrak{P}(X)$; при этом $0 < \#(\mathfrak{A}) \leq \aleph_0$, и если $\#(\mathfrak{A}) = \aleph_0$, то алгебры суть σ -алгебры. Но для этого требуются понятия, которые используются для изло-

жения основной идеи. В третьей главе рассматриваются конечные семейства алгебр. В четвёртой главе доказывается теорема Гитика — Шелаха. В пятой главе рассматриваются общие теоремы о счётных семействах алгебр. В шестой главе доказываются теоремы о счётных семействах алгебр, которые сформулированы во второй главе. В последней седьмой главе речь идёт о вопросах, которые суть вариации вопроса из п. 1.11. Формулировки приведённых здесь результатов не фигурируют во второй главе. (Однако, в этом нет намёка, что результаты из седьмой главы не столь интересные и трудные.) Укажем на принципиально важные теоремы 7.16, 7.20 и нетривиальные результаты о функции $v(n)$. Доказательство теоремы 7.16 очень громоздкое. Доказательство теоремы 7.20, хотя и не столь громоздкое, использует теорему 7.16. Поэтому доказательства этих теорем в настоящей монографии не приводятся. Они приведены в ещё не опубликованной монографии автора [20]. Доказательства нетривиальных результатов о функции $v(n)$ также не приводятся. Здесь в последнее время произошёл существенный прогресс, и требуется время, чтобы осознать новые идеи. Другие важные в нашей теории результаты из седьмой главы приведены с доказательством.

Перечислим пункты, в которых говорится о нерешённых задачах: 2.26, 2.33, 2,35, 2.38, 7.17, 7.18, 7.21, 7.47.

Выход моей книги на русском языке и в издательстве МЦНМО для меня волнующее событие. Горячая благодарность всем, кто принимал участие в этой публикации. Особая благодарность руководителям издательства Юрию Николаевичу Торхову и Ивану Валерьевичу Яценко.

Глава 2

Основная идея. Основные результаты

2.1. Предмет наших исследований — множества, не принадлежащие алгебрам. Так как эти множества суть глобальные объекты, их изучение представляет большие трудности. Наша идея состоит в том, что утверждение «множество не принадлежит алгебре» можно выразить на языке ультрафильтров, заданных на X . Но ультрафильтры — объекты локальные, так как ультрафильтр на X есть точка компактного расширения Стоуна — Чеха пространства X , когда на X задана дискретная топология.

Начнём с общеизвестного понятия. Под *фильтром* $\mathfrak{f}$ на X понимается семейство подмножеств пространства X , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) если $M \in \mathfrak{f}$, $M' \in \mathfrak{P}(X)$ и $M' \supset M$, то $M' \in \mathfrak{f}$;
- 2) если $M_1, M_2 \in \mathfrak{f}$, то $M_1 \cap M_2 \in \mathfrak{f}$;
- 3) $\emptyset \notin \mathfrak{f}$.

Фильтр $\mathfrak{f}$ называется *максимальным (ультрафильтром)*, если не существует такого фильтра $\mathfrak{f}'$, что $\mathfrak{f}' \supsetneq \mathfrak{f}$. Из леммы Куратовского — Цорна следует, что для фильтра $\mathfrak{f}$ существует ультрафильтр $\mathfrak{f}' \supseteq \mathfrak{f}$. (Подробно о лемме Куратовского — Цорна говорится в п. 5.39.)

2.2. Напомним несколько простейших понятий из общей топологии. Пусть $\mathfrak{X}$ — *тихоновское (вполне регулярное)* топологическое пространство, т. е. справедливо следующее:

- 1) для каждой пары различных точек $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$ существует такое открытое множество $U \subset \mathfrak{X}$, что $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$;
- 2) для любого $x \in \mathfrak{X}$ и любого такого замкнутого множества $F \subset \mathfrak{X}$, что $x \notin F$, существует такая непрерывная на $\mathfrak{X}$ функция¹ f , что $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ для всех $y \in F$.

Тогда существует компакт $\mathfrak{K}$, который содержит всюду плотное множество $\mathfrak{X}'$, гомеоморфное $\mathfrak{X}$. Будем отождествлять $\mathfrak{X}'$ с $\mathfrak{X}$. Мы называем $\mathfrak{K}$ *компактным расширением пространства $\mathfrak{X}$* . Каждая непре-

¹ Если не указано противное, под функцией понимается действительная функция.

рывная функция на $\mathfrak{K}$ есть непрерывная ограниченная функция на $\mathfrak{X}$. Обратное, вообще говоря, неверно: не всегда любую непрерывную и ограниченную на $\mathfrak{X}$ функцию можно непрерывно продолжить на компактное расширение $\mathfrak{K}$. Если $\mathfrak{X}$ — компакт, то он имеет одно компактное расширение $\mathfrak{K}$. Если $\mathfrak{X}$ не есть компакт, то существует «много» компактных расширений. «Самое большое» из них называется компактным расширением Стоуна — Чеха и обозначается через $\beta\mathfrak{X}$. Компактное расширение $\mathfrak{K}$ тихоновского топологического пространства $\mathfrak{X}$ есть $\beta\mathfrak{X}$ (т. е. существует гомеоморфизм $\mathfrak{K}$ на $\beta\mathfrak{X}$, при котором $\mathfrak{X}$ «остаётся на месте») тогда и только тогда, когда любую непрерывную и ограниченную на $\mathfrak{X}$ функцию можно непрерывно продолжить на $\mathfrak{K}$.

Вернёмся к множеству X . Введём на X дискретную топологию и рассмотрим компактное расширение Стоуна — Чеха βX . Так как на X задана дискретная топология, любая функция на X непрерывна. Итак, любая ограниченная на X функция непрерывно продолжается на βX . Понятно, что если X — конечное множество, то $\beta X = X$. Пусть $M \subseteq \beta X$. Через $\overline{M}$ обозначим замыкание M в βX . В частности, если $M \subseteq X$, то $\overline{M}$ есть замыкание M в βX . Пусть $\mathfrak{f}$ — ультрафильтр на X . Положим

$$F = \bigcap \{ \overline{M} \mid M \in \mathfrak{f} \}.$$

Легко показать, что F есть точка пространства βX . Верно и обратное. Пусть $a \in \beta X$. Положим

$$\mathfrak{f} = \{ M \in \mathfrak{P}(X) \mid a \in \overline{M} \}.$$

Легко показать, что $\mathfrak{f}$ — ультрафильтр на X . В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать ультрафильтры только на X . Поэтому будем говорить про ультрафильтр, не упоминая, что он задан на X . А так как ультрафильтр есть точка из βX , и обозначаться он будет как точка из βX . Если X — конечное множество, то каждый ультрафильтр есть точка пространства X . Отметим важные факты. Пусть $M \in \mathfrak{P}(X)$. Множество $\overline{M}$ замкнутое и открытое в βX . Множество всех ультрафильтров, содержащих M , есть $\overline{M}$, и оно является компактным.

2.3. Переходим к изложению основной идеи. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$. Мы говорим, что ультрафильтры a и b являются $\mathcal{A}$ -эквивалентными, если $a \cap \mathcal{A} = b \cap \mathcal{A}$. Понятно, что бинарное отношение $\mathcal{A}$ -эквивалентности рефлексивное, транзитивное и симметричное. Очевидно, что если $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(X)$, то два различных ультрафильтра не являются $\mathcal{A}$ -эквивалентными. Также очевидно, что если $\mathcal{A}$ содержит только два элемента — $\emptyset$ и X , — то любые два ультрафильтра суть

$\mathcal{A}$ -эквивалентные. Если a и b суть $\mathcal{A}$ -эквивалентные ультрафильтры, мы будем говорить, что a имеет $\mathcal{A}$ -эквивалентный ультрафильтр b или a $\mathcal{A}$ -эквивалентен b . В дальнейшем, когда говорится, что a и b суть $\mathcal{A}$ -эквивалентные ультрафильтры, предполагается, что $a \neq b$.

Теорема. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$. Множество U принадлежит $\mathfrak{F}(X) \setminus \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда существуют такие $\mathcal{A}$ -эквивалентные ультрафильтры a и b , что $a \ni U$, $b \not\ni U$.

Доказательство. Если для множества U существуют соответствующие $\mathcal{A}$ -эквивалентные ультрафильтры a и b , то очевидно, что $U \notin \mathcal{A}$. Пусть теперь для множества U не существует таких $\mathcal{A}$ -эквивалентных ультрафильтров a и b , что $a \ni U$, $b \not\ni U$. Требуется доказать, что $U \in \mathcal{A}$. Предположим противное: пусть $U \notin \mathcal{A}$. Очевидно, что $U \neq \emptyset$ и $X \setminus U \neq \emptyset$. Зафиксируем ультрафильтр $a \ni U$. Для каждого ультрафильтра $b \ni X \setminus U$ существует такое множество $V(b) \in \mathcal{A}$, что $b \ni V(b)$ и $a \not\ni V(b)$. В силу компактности множества $X \setminus U$ существует такой конечный набор множеств

$$V(b_1), \dots, V(b_n) \in \mathcal{A},$$

что $a \not\ni V(b_k)$ для всех $k \in [1, n]$ и

$$X \setminus U \subseteq \bigcup_{k=1}^n V(b_k).$$

Положим

$$W(a) = X \setminus \bigcup_{k=1}^n V(b_k).$$

Очевидно, что $a \ni W(a)$, $\mathcal{A} \ni W(a)$ и $W(a) \subseteq U$. Для каждого ультрафильтра $c \ni U$ возьмём соответствующее множество $W(c)$. В силу компактности множества $\bar{U}$ существует такой конечный набор множеств

$$W(a_1), \dots, W(a_m) \in \mathcal{A},$$

что

$$U = \bigcup_{k=1}^m W(a_k).$$

Итак, $U \in \mathcal{A}$. Противоречие. □

2.4. Выше говорилось, наши результаты посвящены не более чем счётным семействам алгебр. В следующем основополагающем утверждении это предположение не имеет смысла, т. е. в нём идёт речь о непустом семействе алгебр произвольной мощности.

Основное утверждение. Пусть $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — непустое семейство алгебр. Для того чтобы выполнялось условие $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda \neq \mathfrak{P}(X)$, необходимо и достаточно существование таких непересекающихся замкнутых множеств $S, T \subset \beta X$, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует пара $\mathcal{A}_\lambda$ -эквивалентных ультрафильтров s_λ, t_λ и $s_\lambda \in S, t_\lambda \in T$.

Доказательство. Если $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda \neq \mathfrak{P}(X)$, то существует множество $Q \notin \mathcal{A}_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. В силу теоремы 2.3 для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует такая пара $\mathcal{A}_\lambda$ -эквивалентных ультрафильтров s_λ и t_λ , что $s_\lambda \ni Q, t_\lambda \not\ni Q$. Положим $S = \bar{Q}, T = \bar{X} \setminus \bar{Q}$. Если же существуют соответствующие множества ультрафильтров S и T , возьмём такое $Q \in \mathfrak{P}(X)$, что $\bar{Q} \supseteq S, \bar{Q} \cap T = \emptyset$. Очевидно, что $Q \notin \mathcal{A}_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. $\square$

2.5. Приведём важное понятие.

Определение. Под ядром алгебры $\mathcal{A}$ (обозначение $\ker \mathcal{A}$) понимается множество ультрафильтров²

$$\{a \in \beta X \mid a \text{ имеет } \mathcal{A} \text{ — эквивалентный ультрафильтр}\}.$$

Если $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(X)$, то $\ker \mathcal{A} = \emptyset$. Если $\mathcal{A} \neq \mathfrak{P}(X)$, то $\#(\ker \mathcal{A}) \geq 2$. Если $\#(X) > 1$ и алгебра $\mathcal{A}$ содержит только два элемента $\emptyset$ и X , то $\ker \mathcal{A} = \beta X$. Для того чтобы ультрафильтр a принадлежал $\ker \mathcal{A}$, необходимо и достаточно существование такого множества U , что все множества из $a \cap U$ не принадлежат $\mathcal{A}$.

2.6. Приведём известное понятие, которое было введено задолго до появления нашей монографии [12].

Определение. Алгебра $\mathcal{A}$ называется ω -насыщенной, если не существуют $\aleph_0$ попарно непересекающихся множеств, не принадлежащих $\mathcal{A}$.

Понятно, что алгебра $\mathcal{A}$ является ω -насыщенной тогда и только тогда, когда $\#(\ker \mathcal{A}) < \aleph_0$.

2.7. Определение. Точка $a \in \beta X$ называется *регулярной*, если существует такая счётная последовательность множеств $M_1, \dots, M_k, \dots$, что $a \notin \bar{M}_k$ для всех k , но $a \in \bigcup \bar{M}_k$. Точка $a \in \beta X$ называется *иррегулярной*, если она не регулярная.

Соответственно, мы говорим о регулярных и иррегулярных ультрафильтрах. Если $\beta X \setminus X$ содержит иррегулярную точку, то мощность множества X «гигантская». (Очевидно, что утверждение $\beta X \setminus X$ содержит иррегулярную точку эквивалентно такому утверждению: можно

² Напомним, что в силу нашего предположения если ультрафильтр a имеет $\mathcal{A}$ -эквивалентный ультрафильтр b , то $a \neq b$.

задать σ -двухзначную меру μ и все элементы $\mathfrak{P}(X)$ суть μ -измеримые множества.) Точки множества X иррегулярные. Если $\mathcal{A}$ — ω -насыщенная σ -алгебра и $\mathcal{A} \neq \mathfrak{P}(X)$, то все точки множества $\ker \mathcal{A}$ иррегулярные.

2.8. Приведём несколько понятий, которые нужны для формулировки условий, необходимых и достаточных для выполнения равенства $\bigcup \mathfrak{A} = \mathfrak{P}(X)$. Здесь $\mathfrak{A}$ — семейство алгебр, каждая из которых не совпадает с $\mathfrak{P}(X)$, $0 < \#(\mathfrak{A}) \leq \aleph_0$ и если $\#(\mathfrak{A}) = \aleph_0$, то алгебры из $\mathfrak{A}$ суть σ -алгебры.

Определение. Мы говорим, что пара $(\mathfrak{A}, A)$, где $\mathfrak{A}$ — семейство алгебр и A — множество ультрафильтров, есть *цикл*, если справедливо следующее:

- 1) $\mathfrak{A}$ — конечная последовательность алгебр $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_\nu$, и ν — нечётное число, большее 1;
- 2) A — множество попарно различных ультрафильтров $a_1, \dots, a_\nu$ (положим $a_{\nu+1} = a_1$);
- 3) если $i \in [1, \nu]$, то a_i и a_{i+1} суть $\mathcal{A}_i$ -эквивалентные ультрафильтры.

2.9. Определение. Мы говорим, что семейство алгебр $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ имеет *цикл*, если существует цикл $(\mathfrak{A}, A)$, где $\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{A}_{\lambda_\nu}\}$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ суть попарно различные индексы из Λ .

2.10. Определение. Семейство алгебр называется *строго зацикленным*, если оно имеет цикл, содержащий только ω -насыщенные алгебры.

2.11. Определение. Цикл $(\mathfrak{A}, A)$, где $\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_\nu\}$, называется ω -циклом, если каждая из пар $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$, $\dots$, $(\mathcal{A}_{\nu-1}, \mathcal{A}_\nu)$, $(\mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_1)$ содержит ω -насыщенную алгебру.

Так как ν — нечётное число, большинство алгебр из $\mathfrak{A}$ являются ω -насыщенными. Понятно, что если все алгебры $\mathfrak{A}$ суть σ -алгебры, то все ультрафильтры A суть иррегулярные ультрафильтры.

2.12. Определение. Пусть семейство алгебр имеет счётную последовательность циклов $(\mathfrak{A}_1, A_1), \dots, (\mathfrak{A}_k, A_k), \dots$. Назовём эту последовательность *расщеплённой*, если для каждого $n \in \mathbb{N}^+$ выполняются условия

$$\mathfrak{A}_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^n \mathfrak{A}_k \neq \emptyset, \quad A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k \neq \emptyset.$$

2.13. Определение. Мы говорим, что алгебра $\mathcal{B}$ есть *расширение* алгебры $\mathcal{A}$, если $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \neq \mathfrak{P}(X)$. Мы говорим, что семейство алгебр $\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ есть *расширение* семейства алгебр $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, если $\mathcal{B}_\lambda$