

В.Б.АЛФУТОВА
А.В.УСТИНОВ

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$$

$$4 \operatorname{arctg} \frac{4}{5} - \operatorname{arctg} \frac{4}{239} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

АЛГЕБРА и ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Сборник задач



Н. Б. АЛФУТОВА
А. В. УСТИНОВ

АЛГЕБРА и ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Сборник задач
для математических школ

Издание 3-е, исправленное и дополненное

Москва
МЦНМО
2009

УДК 51
ББК 21.1
А45

Рецензент: доктор физико-математических наук,
профессор Ю. П. Соловьев.

Алфутова Н. Б. Устинов А. В.

А45 Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2009. — 336 с.

ISBN 978-5-94057-550-4

Настоящее пособие представляет собой сборник задач по математике, предназначенный прежде всего для учеников старших классов с углубленным изучением математики, интересующихся точными науками. Он также будет полезен преподавателям математики и студентам, изучающим математику в высших учебных заведениях. Значительная часть материала может быть использована для подготовки к письменным и устным вступительным экзаменам в ВУЗы.

Основу сборника составляют задачи к курсу алгебры, который читался в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова при МГУ им. М. В. Ломоносова в 1995—2000 годах.

Предыдущее издание книги вышло в 2005 г.

ББК 21.1

ISBN 978-5-94057-550-4

© Алфутова Н. Б., Устинов А. В.,
2002, 2005, 2009.

© МЦНМО, 2009.

Оглавление

Предисловие	5
Обозначения	7
1. Метод математической индукции	8
1.1. Тожества, неравенства и делимость	8
1.2. Индукция в геометрии и комбинаторике	12
2. Комбинаторика	16
2.1. Сложить или умножить?	16
2.2. Принцип Дирихле	17
2.3. Размещения, перестановки и сочетания	20
2.4. Формула включений и исключений	28
2.5. Числа Каталана	30
3. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики	32
3.1. Простые числа	32
3.2. Алгоритм Евклида	34
3.3. Мультипликативные функции	40
3.4. Числа Фибоначчи	45
3.5. Цепные дроби	53
3.6. Континуанты	60
4. Арифметика остатков	65
4.1. Четность	65
4.2. Делимость	68
4.3. Сравнения	70
4.4. Теоремы Ферма и Эйлера	76
4.5. Признаки делимости	82
4.6. Китайская теорема об остатках	86
5. Числа, дроби, системы счисления	90
5.1. Рациональные и иррациональные числа	90
5.2. Десятичные дроби	95
5.3. Двоичная и троичная системы счисления	98
6. Многочлены	106
6.1. Квадратный трехчлен	106
6.2. Алгоритм Евклида для многочленов и теорема Безу	109
6.3. Разложение на множители	115
6.4. Многочлены с кратными корнями	116
6.5. Теорема Виета	118
6.6. Интерполяционный многочлен Лагранжа	121
7. Комплексные числа	124
7.1. Комплексная плоскость	124
7.2. Преобразования комплексной плоскости	135
7.3. Целые гауссовы числа	138
8. Алгебра + геометрия	143
8.1. Геометрия помогает алгебре	143
8.2. Комплексные числа и геометрия	145
8.3. Тригонометрия	148

9. Уравнения и системы	155
9.1. Уравнения третьей степени	155
9.2. Тригонометрические замены	159
9.3. Итерации	161
9.4. Системы линейных уравнений	171
10. Неравенства	176
10.1. Различные неравенства	176
10.2. Суммы и минимумы	179
10.3. Выпуклость	180
10.4. Симметрические неравенства	182
11. Последовательности и ряды	185
11.1. Конечные разности	185
11.2. Рекуррентные последовательности	190
11.3. Производящие функции	198
11.4. Многочлены Гаусса	204
12. Шутки и ошибки	206
Ответы, указания, решения	210
Глава 1	210
Глава 2	212
Глава 3	220
Глава 4	237
Глава 5	247
Глава 6	255
Глава 7	261
Глава 8	268
Глава 9	273
Глава 10	281
Глава 11	286
Глава 12	301
А. Программа курса	303
В. Источники задач и ссылки на дополнительную литературу	305
С. Формулы и числа	308
I. Греческий алфавит	308
II. Треугольник Паскаля и числа Фибоначчи	308
III. (1, 2)-треугольник Паскаля и числа Люка	308
IV. Константы	309
V. Десятичные периоды дробей $1/p$	310
VI. Первые 20 греческих числовых приставок	311
VII. Последовательности	311
VIII. Многочлены	314
IX. Основные тригонометрические тождества	314
X. Таблица простых чисел	316
XI. Таблица квадратов	317
Литература	318
Предметный указатель	329

Предисловие

Настоящее пособие представляет собой сборник задач по математике, предназначенный прежде всего для учеников старших классов, интересующихся точными науками. Он также будет полезен преподавателям математики и студентам, изучающим математику в высших учебных заведениях. Значительная часть материала может быть использована для подготовки к письменным и устным вступительным экзаменам в ВУЗы.

Основу сборника составляют задачи к курсу алгебры, который в 1995—2000 годах читался О. А. Чалых, Н. Б. Алфутовой и А. В. Устиновым в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова при МГУ. В приложении А приведена программа этого курса. Для того, чтобы сделать содержание книги более широким и целостным, авторы включили в нее дополнительный материал, собрав и упорядочив задачи из других источников.

Математические курсы, читаемые в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова, традиционно содержат разделы, которые можно назвать смежными. Они находятся на стыке алгебры с комбинаторикой, геометрией, теорией чисел и математическим анализом. Поэтому некоторые задачи из книги имеют к алгебре лишь косвенное отношение. Эти задачи призваны подчеркнуть связь различных разделов математики и проиллюстрировать многообразие методов.

В каждой главе кратко излагается теоретический материал, необходимый для понимания задач. В конце задачи иногда даются ссылки на задачи или литературу, которые непосредственно связаны с данным материалом. Близкий по духу теоретический материал можно найти в книгах [15] и [23], которые также написаны по материалам курсов, читавшихся в школе им. А. Н. Колмогорова.

При подготовке пособия использовались различные учебники и монографии, сборники олимпиадных и конкурсных задач, существенная часть упражнений была почерпнута из многочисленных публикаций журнала «Квант». В результате работы над книгой был создан своеобразный путеводитель, помещенный в приложение В. В нем по каждой из тем задачника даны ссылки на соответствующие публикации. К со-

жалению, в настоящий момент не представляется возможным указать авторов всех задач, вошедших в книгу, и перечислить все оригинальные источники. Часть материала встречается сразу в нескольких сборниках. Со многими задачами авторы познакомились еще за время своего обучения в школе-интернате. Некоторые упражнения рождались в разговорах с коллегами по кафедре математики.

В книге также встречаются более сложные задачи, не соответствующие школьному уровню. Они составлены по материалам спецкурсов и спецсеминаров, которые второй из авторов вел на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

Авторы приносят глубокую благодарность педагогам и математикам, работавшим в разное время в ФМШ № 18 при МГУ (позднее в школе им. А. Н. Колмогорова), опыт которых отражен в этой книге. Авторы благодарят В. В. Вавилова, А. А. Егорова, которые взяли на себя труд прочесть предварительные варианты первого издания книги, за их многочисленные добавления, исправления и полезные советы. Особая благодарность И. Д. Кану, который участвовал в подготовке как первого, так и второго издания книги. Отдельное спасибо О. А. Соловьеву за неизменную TeX-ническую поддержку.

Авторы будут благодарны читателям за отзывы, критические замечания, предложения и новые задачи.

Н. Б. Алфимова

iam.khv.ru

А. В. Устинов

ustinov@mech.math.msu.su

Обозначения

В списке указаны страницы, на которых введены эти обозначения.

Обозначение	Смысл	Стр.
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел	
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел	
$\mathbb{Q}$	множество рациональных чисел	90
$[x]$	целая часть числа x (наибольшее целое, не превосходящее x)	
$\{x\}$	дробная часть числа x : $\{x\} = x - [x]$	
$n!$	факториал: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$	9
$\{x_n\}$	последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$	
$b \mid a$	b делит a	10
$a : b$	a кратно b	10
$a \equiv b \pmod{m}$	a сравнимо с b по модулю m	70
$\bar{a}$	класс вычетов по модулю m	70
$(a_k \dots a_0)_q$	запись числа в q -ичной системе счисления	8
$(a_1, \dots, a_n)$	наибольший общий делитель чисел $a_1, \dots, a_n$	34
$[a_1, \dots, a_n]$	наименьшее общее кратное чисел $a_1, \dots, a_n$	38
$[a_0; a_1, \dots, a_n]$	цепная дробь	53
$\varphi(n)$	функция Эйлера	78
$\tau(n)$	количество положительных делителей числа n	41
$\sigma(n)$	сумма положительных делителей числа n	41
F_n	числа Фибоначчи	45
i	мнимая единица $i = \sqrt{-1}$	124
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел	124
$\bar{z}$	комплексно сопряженное число к числу z	124
$\arg z$	аргумент комплексного числа z	124
$ z $	модуль комплексного числа z	124
π	отношение длины окружности к диаметру	
e	основание натуральных логарифмов	94
φ	$\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2$ — число Фидия	47
Δ	оператор конечной разности	185
$\bar{A}_n^k$	число k -размещений с повторениями из n элементов	20
A_n^k	число k -размещений без повторений из n элементов	20
P_n	число перестановок из n элементов	20
$\bar{C}_n^k$	число k -сочетаний с повторениями из n элементов	21
C_n^k	число k -сочетаний без повторений из n элементов	21
T_n^k	$C_n^k + C_{n-1}^{k-1}$	26
C_n	числа Каталана	30
$\text{ord}_p m$	показатель, с которым простое p входит в разложение целого числа m	43
E_n	репьюнит порядка n : $E_n = \underbrace{11 \dots 1}_n$	95

ГЛАВА 1

Метод математической индукции

1.1. Тожества, неравенства и делимость

Аксиома индукции. Если известно, что некоторое утверждение верно для 1, и из предположения, что утверждение верно для некоторого n , вытекает его справедливость для $n + 1$, то это утверждение верно для всех натуральных чисел.

1.1. Деление с остатком. Докажите, что если a и b — целые числа и $b \neq 0$, то существует единственная пара чисел q и r таких, что

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

1.2. Позиционная система счисления. Докажите, что при целом $q \geq 2$ каждое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде

$$n = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \dots + a_1 q + a_0,$$

где $0 \leq a_0, \dots, a_k < q$. (См. также 3.159, 11.87.)

Определение. Если $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ — цифры числа n в q -ичной системе счисления, то используется запись $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_q$.

Для записи числа в десятичной системе счисления используется также запись $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_{10} = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$.

1.3. Пусть $\{a_n\} = a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — периодическая последовательность, то есть для некоторого натурального T

$$a_{n+T} = a_n \quad (n \geq 0).$$

Докажите, что среди всех периодов этой последовательности существует период наименьшей длины t , причем T делится на t без остатка.

1.4. Аксиомы индукции. Докажите, что аксиома индукции равносильна любому из следующих утверждений. (См. также 12.1.)

1) Всякое непустое подмножество натуральных чисел содержит наименьшее число.

2) Всякое конечное непустое подмножество натуральных чисел содержит наибольшее число.

3) Если некоторое множество натуральных чисел содержит 1 и вместе с каждым натуральным числом содержит следующее за ним, то оно содержит все натуральные числа.

4) Если известно, что некоторое утверждение верно для некоторого a , и из предположения, что утверждение верно для всех натуральных чисел k , таких, что $a \leq k < n$ вытекает его справедливость для n , то это утверждение верно для всех натуральных чисел $k \geq a$.

5) (Обратная индукция.) Если известно, что некоторое утверждение верно для 1 и 2, и из предположения, что утверждение верно для некоторого $n > 1$, вытекает его справедливость для $2n$ и $n - 1$, то это утверждение верно для всех натуральных чисел.

1.5. Число x таково, что число $x + \frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что при любом натуральном n число $x^n + \frac{1}{x^n}$ также является целым. (См. также 7.49.)

1.6. Даны натуральные числа $x_1, \dots, x_n$. Докажите, что число

$$(1 + x_1^2) \cdot \dots \cdot (1 + x_n^2)$$

можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел. (См. также 7.14.)

1.7*. Числовая последовательность $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ определена равенствами

$$A_1 = 1, \quad A_2 = -1, \quad A_n = -A_{n-1} - 2A_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Докажите, что при $n \geq 1$ число $2^{n+2} - 7A_n^2$ является полным квадратом.

Определение. Через $n!$ (читается « n факториал») обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Для удобства считается, что $0! = 1$.

В задачах 1.8—1.14 докажите тождества.

1.8. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

1.9. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.10. $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

1.11. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.

1.12. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

$$1.13. \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

$$1.14. 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

1.15. Факториальная система счисления. Докажите, что каждое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде

$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \dots,$$

где $0 \leq a_1 \leq 1$, $0 \leq a_2 \leq 2$, $0 \leq a_3 \leq 3$, ...

1.16. Числа $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ определены следующим образом:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Найдите и докажите формулу для этих чисел.

Определение. Пусть a — целое и b — натуральное числа. Число b называется делителем a , если существует целое q такое, что $a = bq$. В этом случае q называется частным от деления a на b .

Соотношение « b делит a », записывается в виде $b \mid a$, причем такая запись всегда включает в себя предположение, что b — натуральное число.

Если b не является делителем a , то будем писать $b \nmid a$.

Существует также соотношение $a : b$ (« a кратно b »), которое означает, что $b = qa$ для некоторого целого q . В этом случае число a может быть отрицательным и даже нулевым (ноль кратен нулю, но ноль не делит ноль).

Докажите, что в задачах 1.17–1.24, указанные соотношения выполняются для любого натурального n .

$$1.17. 10^n + 18n - 1 : 27.$$

$$1.18. 11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133.$$

$$1.19. 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} : 17.$$

$$1.20. n^3 + 5n : 6.$$

$$1.21. 6^{2n+1} + 1 : 7.$$

$$1.22. 3^{2n+2} + 8n - 9 : 16.$$

$$1.23. 4^n + 15n - 1 : 9.$$

$$1.24. 2^{3^n} + 1 : 3^{n+1}.$$

1.25. Докажите, что для всех натуральных n число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n .

1.26*. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое. (См. также 2.36, 3.35.)

1.27. Решите уравнение

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1) \cdot \dots \cdot (x-n+1)}{n!} = 0.$$

В задачах 1.28–1.36 докажите справедливость неравенств для натуральных n .

1.28. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$ (См. также 7.85.)

1.29. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$

1.30. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}.$

1.31. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (n > 1).$

1.32. Неравенство Бернулли. $(1+x)^n \geq 1+nx$ при любом $x > -1$.

1.33. $2^n > n.$

1.34. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$

1.35. $n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n > 2).$

1.36. $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$, где $x_1, \dots, x_n$ — произвольные числа.

1.37.* Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — положительные числа и $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Докажите, что $x_1 + \dots + x_n \geq n$ и выведите отсюда неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}. \quad (1.1)$$

1.38. Обратная индукция. Другое доказательство неравенства (1.1) можно получить с помощью «обратной индукции» (см. задачу 1.4). Для этого сначала проверьте, что неравенство выполняется для всех n вида $n = 2^k$. Затем докажите, что из справедливости неравенства для некоторого n следует его справедливость и для $n-1$.

1.39. Докажите неравенство $2^{m+n-2} \geq mn$, где m и n — натуральные числа.

1.40. Для каких n выполняются неравенства:

а) $n! > 2^n$; б) $2^n > n^2$?

1.41. Вычислите произведение

$$\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \quad (n \geq 2).$$

1.2. Индукция в геометрии и комбинаторике

1.42. Из квадрата клетчатой бумаги размером 16×16 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трех клеток.

1.43. Ханойская башня I. Головоломка «Ханойская башня» представляет собой 8 дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший.

Докажите, что эта головоломка имеет решение. Какой способ решения головоломки будет оптимальным (по числу перемещений)? (См. также 5.89.)

1.44. Ханойская башня II. Занумеруем колышки в задаче о Ханойской башне числами 1, 2, 3. Предположим, что требуется переместить диски с 1-го колышка на 3-й. Сколько понадобится перекладываний, если прямое перемещение диска с 1-го колышка на 3-й запрещено? (Каждое перекладывание должно производиться через 2-й колышек. Как и раньше, больший диск нельзя класть на меньший.)

1.45. Ханойская башня III. Сколько понадобится перекладываний, если в условии задачи 1.43 добавить дополнительное требование: первый диск нельзя класть на второй колышек?

1.46. Ханойская башня IV. На шахматной доске размерами $3 \times n$ (3 столбца и n строк) в первом столбце расположены фишки с номерами от 1 до n (нумерация сверху вниз). Перемещать фишки можно по правилам головоломки Ханойская башня; роль стержней играют три вертикальных столбца, роль дисков — пронумерованные фишки. К правилам добавим ещё два: нельзя делать обратный ход, и цвет поля под каждой из фишек должен сохраняться.

Докажите, что в каждой возникающей позиции будет не более одного хода, причём перемещения станут невозможны, когда все фишки займут третий столбец, то есть головоломка будет решена. Сколько ходов будет при этом сделано?

1.47. Докажите, что квадрат можно разрезать на n квадратов для любого n , начиная с шести.

1.48. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого n , начиная с шести.

1.49. Золотая цепочка. а) На постоялом дворе остановился путешественник, и хозяин согласился в качестве уплаты за проживание

брать кольца золотой цепочки, которую тот носил на руке. Но при этом он поставил условие, чтобы оплата была ежедневной: каждый день должно быть отдано (в сумме) ровно на одно кольцо больше, чем в предыдущий день. Замкнутая в кольцо цепочка содержала 11 колец, а путешественник собирался прожить ровно 11 дней, поэтому он согласился. Какое наименьшее число колец он должен распилить, чтобы иметь возможность платить хозяину?

б) Из скольких колец должна состоять цепочка, чтобы путешественник мог прожить на постоялом дворе наибольшее число дней при условии, что он может распилить только n колец?

1.50. Банк имеет неограниченное количество трех- и пятирублевых купюр. Докажите, что он может выдать ими без сдачи любое число рублей, начиная с восьми. (См. также 3.86.)

1.51.* Гениальные математики. а) Каждому из двух гениальных математиков сообщили по натуральному числу, причем им известно, что эти числа отличаются на единицу. Они поочередно спрашивают друг друга: «Известно ли тебе мое число?» Докажите, что рано или поздно кто-то из них ответит «да». Сколько вопросов они зададут друг другу? (Математики предполагаются правдивыми и бессмертными.)

б) Как изменится число заданных вопросов, если с самого начала известно, что данные числа не превосходят 1000?

1.52. На сколько частей делят плоскость n прямых «общего положения», то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

1.53. На плоскости проведены n окружностей так, что любые две из них пересекаются в паре точек, и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей делят плоскость эти окружности?

1.54. На сколько частей делят пространство n плоскостей, проходящих через одну точку, если никакие три не имеют общей прямой? (См. также 8.2.)

1.55.* На сколько частей делят пространство n плоскостей «общего положения»? И что это за «общее положение»?

1.56. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были окрашены в разные цвета. (Соседними называются области, имеющие общий участок границы.)

1.57. Выпуклая оболочка. Докажите, что для любого числа точек плоскости найдется выпуклый многоугольник с вершинами в некоторых из них, содержащий внутри себя все остальные точки.

1.58. Сумма углов n -угольника. Докажите, что произвольный n -угольник (не обязательно выпуклый) можно разрезать на треугольники непересекающимися диагоналями. Выведите отсюда, что сумма углов в произвольном n -угольнике равна $(n - 2)\pi$.

1.59. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета так, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

1.60. Имеется k ящиков. В некоторых из них лежат еще k ящиков. В некоторых из последних лежат еще ящики (снова k штук) и т. д. Сколько всего ящиков, если заполненных m ?

1.61. Теорема Эйлера. Докажите, что для любого выпуклого многогранника имеет место соотношение

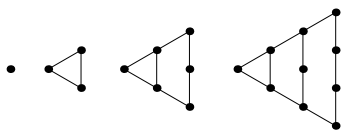
$$B - P + \Gamma = 2,$$

где B — число его вершин, P — число ребер, Γ — число граней.

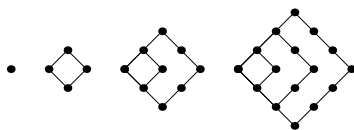
1.62.* Задача Сильвестра. На плоскости взяты несколько точек так, что на каждой прямой, соединяющей любые две из них, лежит по крайней мере еще одна точка. Докажите, что все точки лежат на одной прямой.

1.63. Сколько существует (невырожденных) треугольников периметра 100 с целыми длинами сторон?

1.64. Многоугольные числа. Для нахождения m -угольных чисел $P_m(n)$ шары укладываются в виде правильных m -угольников со стороной n как показано на рисунках:



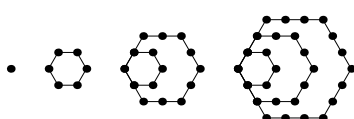
$$P_3(n) = 1, 3, 6, 10, \dots$$



$$P_4(n) = 1, 4, 9, 16, \dots$$



$$P_5(n) = 1, 5, 12, 22, \dots$$



$$P_6(n) = 1, 6, 15, 28, \dots$$

Докажите, что для произвольного $m \geq 3$

$$P_m(n) = \frac{n((m-2)n - (m-4))}{2}.$$

1.65. Проверьте следующие свойства многоугольных чисел:

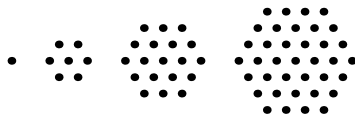
а) $P_3(n) + P_3(n-1) = P_4(n)$;

б) $3P_5(n) = P_3(3n-1)$;

в) $P_m(n) = (m-2)P_3(n-1) + n$.

Дайте алгебраические и геометрические доказательства этих фактов.

1.66. Гексы. Иногда шестиугольными называют также числа $X(n)$, которые получаются, если шары укладывать в правильные шестиугольники со стороной n без пустот:



$$X(n) = 1, 7, 19, 37$$

Чтобы избежать путаницы, М. Гарднер назвал такие числа «гексами». Проверьте следующие свойства чисел $X(n)$:

а) $X(n) = 6P_3(n-1) + 1$;

б) $X(1) + X(2) + \dots + X(n) = n^3$.

Как и в задаче 1.65, найдите алгебраические и геометрические доказательства этих формул.

1.67. Тетраэдральные числа. Пусть шары сложены в виде тетраэдра, у которого каждое ребро состоит из n шаров. Обозначим через Y_n количество шаров в таком тетраэдре. Проверьте следующие свойства тетраэдральных чисел Y_n :

а) $Y_n = Y_{n-1} + P_3(n)$;

б) $Y_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

в) $Y_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \dots + n \cdot 1$.

1.68*. Теорема Холла о свадьбах. Пусть имеется m юношей, каждый из которых знаком с несколькими девушками. Докажите, что всех юношей можно женить на знакомых им девушках в том и только том случае, когда любые k юношей из данного множества знакомы по меньшей мере с k девушками ($1 \leq k \leq m$).

ГЛАВА 2

Комбинаторика

2.1. Сложить или умножить?

2.1. а) В Стране Чудес есть три города A , B и C . Из города A в город B ведет 6 дорог, а из города B в город C — 4 дороги. Сколькими способами можно проехать от A до C ?

б) В Стране Чудес построили еще один город D и несколько новых дорог — две из A в D и две из D в C . Сколькими способами можно теперь добраться из города A в город C ?

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b (независимо от выбора элемента a) — n способами, то выбор « a или b » можно сделать $m + n$ способами.

Правило произведения. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b (независимо от выбора элемента a) — n способами, то выбор « a и b » можно сделать $m \cdot n$ способами.

2.2. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров (считается, что номер начинаться с нуля не может)?

2.3. Номер автомашины состоит из трех букв русского алфавита (30 букв) и трех цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?

2.4. В некоторой школе каждый школьник знаком с 32 школьницами, а каждая школьница — с 29 школьниками. Кого в школе больше: школьников или школьниц и во сколько раз?

2.5. В языке одного древнего племени было 6 гласных и 8 согласных, причем при составлении слов гласные и согласные непременно чередовались. Сколько слов из девяти букв могло быть в этом языке?

2.6. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из четырех букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо? (См. также 12.10.)

2.7. Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 5?

2.8. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

2.9. Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

2.10. Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть единица, или остальных?

2.11. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Каково наименьшее количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру? (Числа 23 и 37 можно увидеть и в числе 237.)

2.12. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, таких как 54345, 17071)?

2.13. Сколько существует девятизначных чисел, сумма цифр которых четна?

2.14. Сколькими способами можно разложить 7 монет различного достоинства по трем карманам?

2.15. Назовем натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует четырехзначных «симпатичных» чисел?

2.16*. На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За один ход можно передвинуть любую из них на соседнюю по вертикали или по горизонтали клетку. (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу?

2.2. Принцип Дирихле

Принцип Дирихле (принцип ящиков). При любом распределении $nk + 1$ или более предметов по n ящикам в каком-нибудь ящике окажется не менее чем $k + 1$ предмет.

2.17. Докажите, что среди москвичей есть два человека с равным числом волос, если известно, что у любого человека на голове менее одного миллиона волос.

2.18. Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении

а) $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$; б) $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{300}$?

2.19. В мешке 70 шаров, отличающихся только цветом: 20 красных, 20 синих, 20 желтых, остальные — черные и белые. Какое наименьшее