

Л.А. Игнаточкина
А.В. Никифорова

АЛГЕБРА ДЛЯ ГЕОМЕТРИИ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

УДК 512.64, 512.54

ББК 22.144я73

И26

И26 Игнаточкина Л.А., Никифорова А.В. Алгебра для геометрии: Учебное пособие. — М.: Прометей, 2017. — С. 44.

Учебное пособие написано для студентов первого курса МПГУ, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Математика». В начале изучения аналитической геометрии некоторые понятия алгебры (определитель матрицы, группа, отображение) еще до конца не освоены студентами и их применение для целей аналитической геометрии затруднено. Данная пособие предназначено для устранения указанных затруднений.

ISBN 978-5-906879-92-9

© Игнаточкина Л.А., Никифорова А.В. 2017.

© Издательство «Прометей», 2017.

Содержание

1. Системы линейных уравнений	5
1.1. Линейные уравнения	5
1.2. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными . . .	6
1.3. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными . . .	8
1.4. Задачи	11
2. Матрицы и определители	12
2.1. Матрицы и определители 2×2	12
2.1.1. Определения	12
2.1.2. Операции с 2×2 -матрицами	13
2.1.3. Определитель произведения двух 2×2 -матриц и транспонированной матрицы	15
2.1.4. Единичная матрица. Обратная матрица.	16
2.1.5. Задачи	18
2.2. Матрицы и определители 3×3	18
2.2.1. Определения	18
2.2.2. Операции с 3×3 -матрицами	21
2.2.3. Определитель произведения двух 3×3 -матриц и транспонированной матрицы	21
2.2.4. Единичная матрица. Обратная матрица	22
2.2.5. Задачи	24
2.3. 2×3 -матрица и ее ранг.	24
2.3.1. Определения	24
2.3.2. Задачи	27
3. Отображения	27
3.1. Инъективное, сюръективное, биективное отображение	27
3.2. Композиция отображений	30
3.3. Обратное отображение	32
3.4. Преобразование множества	32
3.5. Задачи	36

4. Группы.	37
4.1. Определение и примеры	37
4.2. Подгруппы	42

1. Системы линейных уравнений

1.1. Линейные уравнения

Понятие уравнения нам знакомо из школьного курса математики. Приведем примеры уравнений:

$$x + y = 0; \quad x + 2(y + 2) - 3z = 4; \quad 2z = 7. \quad (1.1)$$

Буквы x , y , z называются *переменными* в этих уравнениях. Вместо переменных можно подставлять конкретные числа. При этом могут получаться как верные, так и не верные равенства. Например, если в первое уравнение из (1.1) вместо x подставить 2, а вместо y подставить 5, то получим $7 = 0$. Это равенство не верно и такие значения x и y нас особо интересовать не будут. А вот если подставить вместо x число 2, а вместо y — число -2 , то получится равенство $0 = 0$. Это равенство верное.

Набор чисел, который при подстановке в уравнение дает верное равенство, называется *решением уравнения*.

Уравнение может иметь единственное решение, так и не единственное решение. Например, уравнение $2x = 4$ имеет единственное решение $x = 2$, а уравнение $2x + y = 3$ имеет бесконечно много решений ($x = 2$, $y = -1$; $x = 1, 5$, $y = 0$ и так далее).

Какие действия можно производить с уравнением, чтобы не изменить его решения? Во-первых, к обеим частям уравнения можно прибавить одно и то же число. Например,

$$x + 2(y + 2) - 3z = 4 \Leftrightarrow x + 2(y + 2) - 3z + 5 = 4 + 5.$$

Во-вторых, умножить обе части уравнения на одно и то же число, отличное от нуля. Например,

$$x + 2(y + 2) - 3z = 4 \Leftrightarrow 2(x + 2(y + 2) - 3z) = 8.$$

В-третьих, перенести слагаемое из одной части уравнения в другую, изменив знак. Например,

$$x + 2(y + 2) - 3z = 4 \Leftrightarrow x + 2(y + 2) = 4 + 3z.$$

1.2. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ – заданные числа, x, y – неизвестные, называется *системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными* (x и y).

Например, системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными является такая система

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 6y = 13. \end{cases} \quad (1.2)$$

Решением системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется пара чисел, подставляя которые в данную систему уравнений вместо x и y соответственно, мы получаем два верных равенства.

Например, пара чисел $(1, 2)$ будет решением системы (1.2). Действительно, подставим 1 вместо x , а 2 вместо y и убедимся, что получились два верных равенства:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 2 = 0 \\ 1 + 6 \cdot 2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 13 = 13. \end{cases}$$

Есть два основных метода решения системы двух линейных уравнений. Первый метод назовем *методом подстановки*. Второй метод назовем *методом сложения*. Одни системы легче решать первым методом, другие – вторым. Рассмотрим примеры решения систем этими методами.

Пример 1.1. Метод подстановки. Пусть дана система (1.2). Выразим из первого уравнения y и подставим во второе уравнение (первое уравнение переписываем)

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 6y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x + 6(2x) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 13x = 13. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем x и подставляем в первое для нахождения y . Итак,

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Итак, решение системы – это пара $(1, 2)$.

Пример 1.2. Метод сложения. Пусть дана система (1.2). Умножим первое уравнение системы на 6 сложим его со вторым (первое уравнение перепишем в исходном виде).

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 6y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 6y + 12x - 6y = 13 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 13x = 13 \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x = 1$ и подставляем в первое уравнение. Откуда получаем $y = 2$. Опять мы получили ту же пару $(1, 2)$.

Методом сложения можно решать системы еще и следующим образом. Рассмотрим ту же систему уравнений (1.2). Умножим первое уравнение этой системы на 6 и сложим со вторым (убрали переменную y , в полученном уравнении осталась только переменная x), а затем умножим второе уравнение этой же системы на -2 и сложим с первым (убрали переменную x , в уравнении осталась только переменная y). В результате получим такую систему:

$$\begin{cases} 13x = 13 \\ -13y = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Мы рассмотрели пример системы, которая имеет единственное решение. Но могут быть и еще два случая: система может не иметь решений или иметь бесконечно много решений. Посмотрим как это выглядит в конкретных примерах.

Пример 1.3. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 4x - 2y = 6. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения переменную y и подставим во второе уравнение

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 4x - 2(2x + 3) = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ -6 = 6. \end{cases}$$

Посмотрим на второе уравнение системы. После раскрытия скобок и приведения подобных мы получили равенство $-6 = 6$. Это равенство всегда не верно. Какие бы числа в качестве x и y мы ни брали, последняя система

равенств не будет верной из-за второго равенства. Значит, она не имеет решений, следовательно и исходная система уравнений решений не имеет.

Посмотрим на пример системы, которая имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6. \end{cases} \quad (1.3)$$

Выражаем из первого уравнения y и подставляем во второе уравнение:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 4x - 2(2x - 3) = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 6 = 6. \end{cases}$$

Смотрим на второе уравнение последней системы. Оно верно всегда. Следовательно, решением последней системы (а значит, и исходной) будет любая пара чисел, которая превращает первое уравнение этой системы в верное равенство. Таких пар чисел бесконечно много. Чтобы привести пример такой пары чисел, в качестве x берем конкретное число и подставляем его в первое уравнение последней системы и вычисляем значение y . Например, пусть $x = 0$. Тогда $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$. Следовательно, пара $x = 0$ и $y = 3$ является решением системы уравнений (1.3). Если взять $x = 2$, то получим еще одно решение: $x = 2$ и $y = 7$. И так далее. Итак, данная система имеет бесконечно много решений.

1.3. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_1, b_2, b_3$ — заданные числа, x, y, z — неизвестные, называется *системой трех линейных уравнений с тремя неизвестными* (x, y и z).

Например, системой трех линейных уравнений с тремя неизвестными является такая система

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ x + 6y = 1 \\ x - 2z = -5 \end{cases} \quad (1.4)$$