

Алгоритмы

решения

задач

**7-9
классы**

Алгебра

- Краткая теория по всем темам
- Доступные и наглядные алгоритмы решений
- Задачи и примеры с решениями



УДК 373:512
ББК 22.14я721
В49

Виноградова, Татьяна Михайловна.
В49 Алгебра. 7—9 классы / Т.М. Виноградова. — Москва : Эксмо, 2018. — 128 с. — (В помощь старшекласснику. Алгоритмы решения задач).

ISBN 978-5-04-093533-8

В пособии представлены алгоритмы решения типовых задач и примеров по алгебре, изучаемых в 7—9-х классах. Перед каждым алгоритмом помещён краткий теоретический блок по теме с необходимыми правилами и формулами. После алгоритма приведены образец решения задачи или примера, а также задания для самостоятельного решения.

Пособие адресовано учащимся 7—9-х классов, учителям и родителям, помогающим ребенку в выполнении домашних заданий.

УДК 373:512
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-04-093533-8

© Виноградова Т.М., 2018
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА	5
Числовые выражения	5
Выражения с переменными	6
Сравнение значений выражений	9
Преобразование выражений	10
Тождества	11
Доказательство тождеств	12
Одночлены	13
Умножение одночленов. Возведение одночлена в степень	14
Многочлены	16
Формулы сокращённого умножения	20
Разложение на множители с помощью формул квадрата двучлена	22
Разность квадратов. Сумма и разность кубов	23
РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ	28
Основное свойство рациональной дроби	28
Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень	33
СТЕПЕНИ	36
Степень с натуральным показателем	36
Свойства степени с натуральным показателем	37
Возведение степени в степень, произведения в степень, частного в степень	39
Степень с целым показателем	40
Стандартный вид числа	41
КОРНИ	43
Арифметический квадратный корень	43
Свойства арифметического квадратного корня	43
ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ	47
Абсолютная погрешность	47
Относительная погрешность	48
УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ	49
Уравнение с одной переменной	49

Линейное уравнение с одной переменной.....	49
Системы линейных уравнений	51
График уравнения.....	53
Системы линейных уравнений с двумя переменными	55
Способы решения систем уравнений с двумя переменными.....	56
Квадратные уравнения.....	68
Неполные квадратные уравнения.....	69
Теорема Виета.....	71
Уравнения, приводимые к квадратным	73
Дробные рациональные уравнения.....	75
НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ.....	78
Числовые неравенства и их свойства	78
Свойства числовых неравенств	79
Линейные неравенства с одной переменной	81
Системы неравенств с одной переменной	83
ПРОГРЕССИИ.....	85
Арифметическая прогрессия.....	85
Геометрическая прогрессия.....	85
ФУНКЦИЯ.....	90
Линейная функция и её график.....	102
СПИСОК АЛГОРИТМОВ.....	110
ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ «ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО!»	114

ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА

ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ



Выражение, составленное из чисел, знаков арифметических действий и скобок, называется **числовым**.

Значение числового выражения — число полученное в результате выполнения действий в числовом выражении.

Важно знать!

Если в выражении есть деление на нуль, то это выражение не имеет значения, т. к. на нуль делить нельзя.

Помни!

Если в выражении есть деление на нуль, то говорят, что такое выражение не имеет смысла.

Например, следующие выражения не имеют смысла:

$$28 : (32 - 2 \cdot 16); \frac{15 - 8}{-5 \cdot 6 + 30}.$$

Нахождение значения числового выражения

АЛГОРИТМ

1

① Выполнить действия в скобках, если они есть.



② Выполнить умножение или деление (слева направо).



③ Выполнить сложение или вычитание (слева направо).



④ Записать ответ.

ПРИМЕР



Найти значение выражения: $16 - (0,7 + 14,45) : 7,5$.

Решение.

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \quad 14,45 \\ + \quad 0,7 \\ \hline 15,15 \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{array}{r|l} 15,1,5 & 7,5 \\ -150 & 2,02 \\ \hline 150 & \\ -150 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{array}{r} 16,00 \\ -2,02 \\ \hline 13,98 \end{array}$$

$\textcircled{4}$ *Ответ:* 13,98.



ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти значения выражений:

1) $\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4} + 2,25;$

2) $35,5 : 0,5 - 1976 : 32,5;$

3) $\left(1 - \frac{2}{3}\right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} - 1\right) \cdot 5;$

4) $\left(0,02 \cdot 0,5 + 7,904 : 0,38 - 21 : 10 \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{9}.$



ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ

Выражение, составленное из чисел, переменных (букв), с помощью знаков арифметических действий и скобок, называется **выражением с переменными**.

Важно знать!

Выражение с переменными при разных значениях переменных может принимать разные значения. Если в выражение с переменными подставить вместо каждой переменной какое-либо её значение, то получится числовое выражение. Его значение называется **значением выражения с переменными** при выбранных значениях переменных.

Рациональное выражение — это выражение, содержащее действие сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и скобки.

Рациональное выражение, не содержащее деления на выражение с переменной, называют **целым**.

Например: $3x + 2; (a^2 - 8) \cdot 4.$

Рациональное выражение, содержащее деление на выражение с переменной, называют **дробным**. Например: $\frac{2}{x-1}$; $y + \frac{1}{2y+b}$.

Помни!

Выражение с переменными используют для записи формул:

- $y = 2n$, где n — целое число — формула чётного числа y ;
- $a = 2n + 1$, где n — целое число — формула нечётного числа a ;
- $b = 7n$, где n — целое число — формула числа b , кратного 7.

Нахождение значения выражения с переменными

АЛГОРИТМ

2

- ① Подставить вместо переменных их значения.



- ② Найти значение полученного числового выражения.



- ③ Записать ответ.

ПРИМЕР



Найти значение выражения:

$$3x + 2y - 2a \text{ при } x = \frac{2}{3}; y = \frac{5}{2}; a = 0,8.$$

Решение.

- ① Подставим данные значения переменных в выражение с переменными: $3 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{5}{2} - 2 \cdot 0,8$.
- ② Найдём значение полученного числового выражения: $2 + 5 - 1,6 = 7 - 1,6 = 5,4$.
- ③ **Ответ:** 5,4.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО



- 1) Вычислить значение выражения $2x(x - y)$,
если $x = -2$, $y = 1$.
- 2) Найти значение выражения $\frac{1}{3}a + b$,
если $a = -2,4$; $b = -3,2$.

- 3) Вычислить площадь прямоугольника со сторонами a и b , если $a = 0,7$ м; $b = 0,02$ м.
- 4) Вычислить значение выражения $bt - 3x$, если $b = 10$; $t = -5$; $x = -\frac{1}{3}$.

3

Нахождение значений переменных, при которых выражение имеет смысл

АЛГОРИТМ

- 1 Определить вид данного выражения.



- 2 Если данное выражение *целое*, то оно имеет смысл при любых значениях переменных, входящих в него.
Если данное выражение *дробное*, то оно имеет смысл при тех значениях переменных, входящих в него, при которых значение выражения, стоящего в знаменателе, не равно (отлично) от нуля.



- 3 Записать ответ.



ПРИМЕР

При каких значениях переменной имеют смысл выражения?

- а) $12x + 8$; б) $\frac{45a + b}{16}$; в) $\frac{5b + 4}{b - 2}$.

Решение.

- а) ① $12x + 8$ — целое выражение.

- ② x — любое число.

- ③ **Ответ:** x — любое число.

- б) ① $\frac{45a + b}{16}$ — целое выражение.

- ② a, b — любые числа.

- ③ **Ответ:** a, b — любые числа.

- в) ① $\frac{5b + 4}{b - 2}$ — дробное выражение.

- ② $b - 2 \neq 0$; $b \neq 2$.

- ③ **Ответ:** b — любое число, отличное от 2.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО



При каких значениях переменной имеют смысл выражения?

- | | |
|--------------------|-------------------------------|
| 1) $12x + 3$; | 3) $\frac{5}{x}$; |
| 2) $\frac{x}{5}$; | 4) $\frac{212a + 3}{3 - a}$. |

СРАВНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ



Знаки сравнения неравенств	
Строгие неравенства	Нестрогие неравенства
$<$ — строго меньше	$\leq$ — меньше или равно
$>$ — строго больше	$\geq$ — больше или равно

Важно знать!

- 1) Вместо $n < 27$ или $n = 27$ обычно пишут $n \leq 27$ (читают: n меньше или равно 27).
- 2) Неравенство $-7 < a < 6$ называют **двойным** (читают: a больше -7 и меньше 6).

Сравнение значений выражений

АЛГОРИТМ



- 1 Найти значения выражений.
- ↓
- 2 Сравнить полученные значения.
- ↓
- 3 Сделать вывод.

ПРИМЕР



Сравнить значения выражений: $8,5 - b$ и $0,6b$ при $b = 5$.

Решение.

- ① $8,5 - b = 8,5 - 5 = 3,5$; $0,6b = 0,6 \cdot 5 = 3$.
- ② $3,5 > 3$.
- ③ При $b = 5$ первое выражение больше, чем второе.



ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Сравнить значения выражений $4 - x$ и $4x - 3$ при:

1) $x = 0$;

3) $x = -3$;

2) $x = 1$;

4) $x = 5$.



ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

Основные свойства сложения и умножения чисел	
Переместительное свойство (для любых чисел a и b)	$a + b = b + a$; $ab = ba$
Сочетательное свойство (для любых чисел a , b и c)	$(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$
Распределительное свойство (для любых чисел a , b и c)	$a(b + c) = ab + ac$

Важно знать!

- В любой сумме слагаемые можно переставлять как угодно и произвольным образом объединять их в группы.
- В любом произведении множители можно переставлять как угодно и произвольным образом объединять их в группы.

Помни!

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad;$$
$$a - b = a + (-b).$$

5

Вычисление значений выражений рациональным способом

АЛГОРИТМ

1

Применить одно (или несколько) свойств умножения или сложения для упрощения вычислений.



2

Выполнить вычисление.



3

Записать ответ.



Вычислить рациональным способом:

а) $50 \cdot 2,39 \cdot 0,2$;

б) $2,5 \cdot 5,6 + 2,5 \cdot 4,4$.

Решение.

а) ① $2,39 \cdot (50 \cdot 0,2)$.

② $2,39 \cdot 10 = 23,9$.

③ **Ответ:** 23,9.

б) ① $2,5 \cdot (5,6 + 4,4)$.

② $2,5 \cdot 10 = 25$.

③ **Ответ:** 25.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО



Вычислить рациональным способом:

1) $4,17 + 11,2 + 0,83 + 8,8$; 3) $4 \cdot (-13,7) \cdot 25$;

2) $17,9 - 5,8 - 4,2 + 3,1$; 4) $2,09 \cdot 36,7 - 26,7 \cdot 2,09$.

ТОЖДЕСТВА



Два выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях переменных, называются **тождественно равными**.

Равенство, верное при любых значениях переменных, входящих в него, называется **тождеством**.

Помни!

Верные числовые равенства считают тождествами.

Примеры тождеств

$a + b = b + a$	$a(b + c) = ab + bc$
$ab = ba$	$(-a) \cdot (-b) = ab$
$a(bc) = (ab)c$	$a \cdot (-b) = -ab$
$a + (-a) = 0$	$a + (-b) = a - b$
$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
$a + (b + c) = (a + b) + c$	

Тождественное преобразование (преобразование выражения) — замена одного выражения другим, тождественно равным ему.

Примеры тождественных преобразований выражений:

- 1) приведение подобных слагаемых (чтобы привести подобные слагаемые, нужно сложить их коэффициенты и результат умножить на их общую буквенную часть);
- 2) если перед скобками стоит знак «+», то скобки можно опустить, сохраняя знак каждого слагаемого, заключённого в скобках;
- 3) если перед скобками стоит знак «-», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки, на противоположный.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ

Доказывать тождества можно разными способами. В зависимости от условия применяется один из них.

6

Доказательство тождеств

АЛГОРИТМ

- 1) Выбрать удобный способ доказательства тождества.



- 2) Применить выбранный способ для доказательства тождества.

Способы доказательства тождеств

- 1) Преобразовать одну часть равенства. Если полученный результат совпадает с другой частью, то тождество доказано.
- 2) Преобразовать отдельно каждую часть равенства. Если полученные результаты совпадают, то тождество доказано.
- 3) Вычесть из одной части равенства другую его часть. Если полученный результат равен нулю, то тождество доказано.

ПРИМЕР



Доказать тождество: $7(3x + 0,1) - 0,7 = (25x + 3) - 4(x - 1)$.

Доказательство.

- ① Поскольку и левая, и правая части равенства содержат скобки, используем второй способ доказательства тождеств. Преобразуем каждую часть равенства отдельно. Если получим одинаковые результаты, то данное равенство является тождеством.
- ② $7(3x + 1,1) - 0,7 = 21x + 7,7 - 0,7 = 21x + 7;$
 $(25x + 3) - 4(x - 1) = \underline{25x} + \underline{3} - \underline{4x} + \underline{4} = 21x + 7.$
Получили одинаковые результаты. Значит, тождество доказано.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО



Доказать тождество:

- 1) $5x - 5(x - 1) = 5;$ 3) $9m - 4(m + 5) - 1 =$
 $= 7(m - 3) - 2m;$
- 2) $5(2a + b) = 10(a + b) - 5b;$ 4) $x - (1 - (x - (1 - x))) =$
 $= 3x - 1.$

Важно знать!

Свойства отношения тождественных выражений:

- 1) каждое выражение тождественно самому себе;
- 2) если выражение C тождественно выражению A , то и выражение A тождественно выражению C ;
- 3) если выражение C тождественно выражению A , а выражение A тождественно выражению B , то выражение C также тождественно выражению B .

ОДНОЧЛЕНЫ

Одночлен — произведение чисел, переменных и их степеней. Например: $7xy^2 \cdot 14$; $2x$; 4 .

Одночлен стандартного вида — произведение числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных.

Этот числовой множитель называется **коэффициентом одночлена**.

Суммы показателей степеней переменных, входящих в одночлен стандартного вида, называется **степенью одночлена**.