АКУСТИКА в задачах

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию

Во второе издание включен ряд новых задач. Исправлены замеченные ошибки. Существенно изменилась глава 5; мы учли, что в книге [3], по сравнению с первым изданием данного пособия, задачи нелинейной акустики разобраны более подробно. Поэтому здесь отпала необходимость детального изложения ряда специальных вопросов. В частности, здесь полностью исключены главы «Акустические шумы большой интенсивности» и «Нелинейные задачи различного типа», представленные в учебном пособии [3].

Первое издание было подготовлено к печати в 1990 году, но в связи с трудностями, которые в те годы испытывало научное книгоиздание в России, оно смогло появиться в свет лишь в 1996 году. Нам известно, что все эти годы книга эффективно использовалась в учебном процессе и в настоящее время стала библиографической редкостью. Это основная причина подготовки второго издания. Мы надеемся, что благодаря «классичности» основное содержание книги не слишком устарело, а современные технологии, используемые издательством «Физматлит», позволят сделать эту книгу более «читабельной» и «износостойкой», с тем, чтобы она могла принести пользу как можно большему числу читателей.

За прошедшие годы скончались двое из наших авторов — А.Н. Бархатов и А.А. Горюнов. Мы не считали себя вправе существенно менять содержание предложенных ими задач; исправлены только очевидные неточности. В текст гл. 9 по предложению В.А. Бурова и О.Д. Румянцевой внесено несколько уточнений.

Мы благодарны В.А. Гусеву, который не только подготовил это издание, но и нашел время решить многие задачи, проверить их и в ряде случаев улучшить изложение материала.

С.Н. Гурбатов, О.В. Руденко

Из предисловия к первому изданию

В настоящее время акустика представляет собой развитую область науки и техники, результаты которой используются людьми самых разных профессий. Необходим учебник, позволяющий студенту, аспиранту, специалисту из смежной области за небольшой срок овладеть основами акустики, научиться активно использовать развитые здесь методы упрощений, расчетов, получения численных оценок.

Мы считаем, что последовательность логически правильно расположенных задач — одна из наиболее эффективных форм подачи материала. В нашей книге задачи расположены группами. Как правило, первая задача из группы предназначена для проработки важного теоретического вопроса и снабжена развернутым решением. Последующие задачи служат для освоения техники расчетов и получения оценок. Наиболее простые из них заканчиваются лишь ответами, более сложные — ответами и пояснениями, трудные — решениями. Кроме того, когда группа состоит из однотипных задач, решение дается только к первой; остальные должны быть рассмотрены по аналогии с ней.

Задачник построен на материале курсов, читаемых студентам кафедр акустики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова и Нижегородского государственного университета имени Н.В.Лобачевского.

В первоначальном варианте главы 1 и 2 были написаны А.Н. Бархатовым при участии С.Н. Гурбатова и О.В. Руденко, гл. 3 — А.Н. Бархатовым и С.Н. Гурбатовым, гл. 4 — О.В. Руденко при участии А.Н. Бархатова, гл. 5 — О.В. Руденко и С.Н. Гурбатовым, гл. 6 — В.Г. Можаевым, гл. 7 — С.Н. Гурбатовым при участии А.А. Горюнова, гл. 8 — Н.В. Горской, гл. 9 — А.А. Горюновым. В процессе взаимного редактирования авторами сделаны перекрестные проверки и дополнения, способствовавшие улучшению содержания.

Мы старались в максимальной степени использовать опыт преподавания акустики в университетах России, основанный, в частности, на задачниках С.Н.Ржевкина [1], А.Н. Бархатова и Н.В. Горской [2], а также на материале учебных пособий [3]–[6].

Мы выражаем искреннюю благодарность В.А. Хохловой, П.Н. Кравчуну, А.А. Заикину, Н.В. Прончатову-Рубцову за помощь при подготовке задачника и полезные замечания, М.А. Карпачевой — за большую работу по оформлению рукописи.

Так как курс акустики читается во многих университетах и технических вузах страны, а также в зарубежных университетах, мы надеемся, что книга «Акустика в задачах» поможет учебному процессу и подготовке специалистов соответствующего профиля.

С.Н. Гурбатов, О.В. Руденко

Глава 1

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АКУСТИКИ

§ 1. Линейная акустика идеальной среды

1.1.1. Исходя из уравнений гидродинамики, вывести уравнение для звуковых волн малой амплитуды в идеальной среде.

Решение. Рассмотрим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.1}$$

и уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \tag{1.2}$$

где p — давление, ρ — плотность, $\mathbf{v}$ — скорость частицы.

Представим переменные p и ρ в виде

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \tag{1.3}$$

где p_0, ρ_0 — постоянные равновесные давление и плотность, p', ρ' — их изменения в звуковой волне ($p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$). Подставляя (1.3) в (1.1) и (1.2) и пренебрегая малыми величинами второго порядка относительно p', ρ' и скорости $\mathbf{v}$, получим линеаризованные уравнения для акустических величин:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \tag{1.5}$$

Звуковая волна в идеальной жидкости есть адиабатическое движение. При этом давление p зависит только от одной термодинамической величины, например от плотности ρ (баротропная среда): $p = p(\rho)$. Поэтому

$$p' = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_s \rho', \tag{1.6}$$

где s — энтропия. Тогда из (1.4) получим

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left[\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{1.7}$$

Введем потенциал скорости φ:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{1.8}$$

Из (1.5) получим

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{1.9}$$

а из (1.7)–(1.9) находим волновое уравнение для потенциала φ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, \tag{1.10}$$

в котором Δ — оператор Лапласа, c — скорость звука,

$$c = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}\,.$$

В случае плоской волны, распространяющейся вдоль оси x, уравнение (1.10) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \tag{1.11}$$

Заметим, что условие применимости линеаризованных уравнений движения $p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$ эквивалентно малости скорости движения частиц жидкости в волне по сравнению со скоростью звука: $v \ll c$, т. е. малости числа Маха ($M = v/c \ll 1$).

1.1.2. Найти решение волнового уравнения для бегущей плоской волны. Показать, что звуковая волна является продольной, и установить связь между возмущениями давления, плотности и колебательной скоростью в такой волне.

Решение. Нетрудно показать, что уравнение (1.11) имеет общее решение

$$\varphi(x,t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct),$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции. Рассматривая, например, волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x, для потенциала скорости $\varphi(x,t)$ имеем

$$\varphi(x,t) = F(x - ct), \tag{1.12}$$

и, следовательно, картина возмущений распространяется в среде со скоростью c, называемой скоростью звука. Из формул (1.12) и (1.8) видно, что в бегущей волне колебательная скорость имеет единственную компоненту $v_x = v$. Это означает, что частицы среды в волне колеблются вдоль направления ее распространения, т. е. звуковая волна является продольной. При этом колебательная скорость v связана с приращениями давления p' и плотности ρ' простыми алгебраическими соотношениями. Используя формулы (1.8), (1.9) и (1.12) получаем

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = F'(x - ct), \quad p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho_0 c F'(x - ct), \tag{1.13}$$

и, следовательно,

$$p'/v = \rho_0 c. \tag{1.14}$$

Соотношение (1.14) иногда называют акустическим законом Ома, а величину $\rho_0 c$ — волновым сопротивлением. Используя линеаризованное уравнение состояния (1.6), для возмущения плотности ρ' и колебательной скорости имеем

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{v}{c}. \tag{1.15}$$

Градиент акустического давления, как видно из формулы (1.5), коллинеарен вектору колебательной скорости и — в силу продольного характера звуковой волны — направлению на источник звука. Таким образом, используя приемники градиента давления, можно определить направление прихода акустической волны.

1.1.3. Найти условие, при котором распространение звуковой волны можно рассматривать как адиабатический процесс.

Решение. Распространение звуковой волны сопровождается изменением температуры (см. далее задачи 1.1.31, 1.1.32). Температура увеличивается в тех областях, где среда подвергается адиабатическому сжатию, и уменьшается в областях адиабатического разрежения. Процесс распространения звука можно считать адиабатическим, если за время, равное периоду звуковой волны, тепло не успеет диффундировать на расстояния порядка длины волны λ. Иными словами, «длина температурной волны» λ_T (масштаб диффузии, соответствующий частоте f) должна быть малой по сравнению с длиной акустической волны $\lambda = c/f$.

Длина температурной волны $\lambda_T = 2\sqrt{\pi\chi/f}$ находится из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(x = 0, t) = T_0 e^{-i\omega t},$$

решение которого при $x > 0$ имеет вид

$$T = T_0 e^{-kx} e^{-i\omega t + ikx},$$

где $k = 2\pi/\lambda_T$, χ — коэффициент температуропроводности.

Условие адиабатичности $\lambda > \lambda_T$ будет выполнено для частот

$$f < c^2/(4\pi\chi). \tag{1.16}$$

Оценки показывают, что условие (1.16) хорошо выполняется в жидкостях и газах вплоть до очень высоких частот. Так, в воздухе (числовые значения параметров $\chi = 2{,}8 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, $c = 330$ м/с) звук распространяется адиабатически при частотах $f < 10^{10}$ Гц.

1.1.4. Выразить адиабатический модуль объемной упругости $\varkappa$, связывающий приращения давления и плотности

$$p' = \varkappa_a \rho'/\rho_0 = \beta_a^{-1} \rho'/\rho_0 \tag{1.17}$$

(β_a — адиабатический коэффициент сжатия), через скорость звука c.

Решение. Согласно задаче 1.1.1, малые возмущения давления и плотности в звуковой волне связаны соотношением

$$p'/\rho' = (\partial p/\partial \rho)_s = c^2. \tag{1.18}$$

Из формул (1.17), (1.18) получаем

$$\varkappa_a = \rho_0 c^2.$$

Таким образом, измеряя скорость звука и плотность среды, можно найти ее объемный модуль упругости. Такой способ оказывается наиболее эффективным для слабо сжимаемых сред — жидкостей и твердых тел. Заметим, что число Маха $M = v/c$, введенное в задаче 1.1.1, в силу формул (1.14), (1.15) может быть также записано как $M = \rho'/\rho_0 = p'/\varkappa_a$. Поэтому величину $\varkappa_a$ иногда называют характерным внутренним давлением среды.

1.1.5. Вывести формулу для скорости звука в идеальном газе.

Решение. Уравнение адиабатического процесса в идеальном газе имеет вид

$$p/\rho^\gamma = const = p_0/\rho_0^\gamma, \tag{1.19}$$

где p_0, ρ_0 — равновесные значения давления и плотности, $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме. Для того чтобы найти $(\partial p/\partial \rho)_s$, представим плотность и давление в виде (1.3). Тогда, линеаризуя (1.19), получаем

$$p' = (\gamma p_0/\rho_0)\rho'. \tag{1.20}$$

Используя уравнение состояния идеального газа, имеем

$$pV = p/\rho = RT/\mu, \tag{1.21}$$

где $R = 8{,}314$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная, μ — молекулярная масса, T — температура в кельвинах. Из (1.20), (1.21) для скорости звука следует

$$c = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0} = \sqrt{\gamma R T_0/\mu}. \tag{1.22}$$

Эта формула известна как формула Лапласа, так как именно Лаплас показал необходимость введения множителя γ для адиабатического распространения звука.

1.1.6. Рассчитать адиабатический модуль объемной упругости (внутреннее давление) для воздуха ($c = 330$ м/с, $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3, $\gamma = 1{,}4$) и воды ($c = 1500$ м/с, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3).

Ответ. Для воздуха $\varkappa_a = c^2\rho_0 = 1{,}4{\cdot}10^5$ Па. В случае идеального газа (см.задачу 1.1.5) внутреннее давление $\varkappa_a$ связано с равновесным давлением p_0 формулой $p_0 = \varkappa_a/\gamma$, откуда $p_0 = 1$ атм. В случае воды получаем гораздо большую величину $\varkappa_a = 2{,}25{\cdot}10^9$ Па $= 23{\cdot}10^3$ атм. Поэтому для волн, распространяющихся в воде, линейное приближение справедливо в гораздо более широком диапазоне приращения давления, чем для волн, распространяющихся в воздухе.

1.1.7. Получить приближенную формулу для скорости звука в воздухе, учитывая, что $\gamma = 1{,}4$ и $\mu = 28{,}8$ г/моль.

Ответ. Скорость звука рассчитывается по формуле

$$c \approx 20\sqrt{T_0} \quad (\text{м/с}), \tag{1.23}$$

где T_0 — температура в Кельвинах.

1.1.8. При какой температуре скорость звука в воздухе удвоится по сравнению со скоростью при 0° С и при какой станет в два раза меньше? Скорость звука при $t = 0°$ С равна $c_0 = 330$ м/с.

Ответ. $c = 2c_0$ при $t = 819°$ С, $c = c_0/2$ при $t = -205°$ С (если бы воздух оставался идеальным газом).

1.1.9. В два свистка одинаковой длины вдуваются: воздух, охлажденный до температуры жидкого воздуха ($t_1 = -180°$ С), и теплый воздух. Один свисток издает звук на октаву выше, чем другой. Какова должна быть температура воздуха t_2, вдуваемого во второй свисток?

Ответ. Отношение резонансных частот свистков пропорционально отношению скоростей звука в них. Из (1.23) получаем $t_2 = 99°$ С.

1.1.10. Рассчитать «звуковой барьер» самолета (когда его скорость равна скорости звука) на высоте 9 км, где температура $-70°$ С, и сравнить его со звуковым барьером при 0° С на уровне моря. Зависит ли барьер от атмосферного давления?

Ответ. Около 1000 и 1200 км/ч независимо от давления.

1.1.11. Какова скорость звука внутри цилиндра двигателя внутреннего сгорания сразу же после вспышки, когда давление p равно 200 атм и температура 1000° С, если для газовой смеси $\gamma = c_p/c_v = 1{,}35$, а плотность смеси при 0° С и атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па равна $\rho_0 = 0{,}0014$ г/см^3?

Решение. Считая процесс адиабатическим, находим плотность газовой смеси после вспышки $\rho = \rho_0(p/p_0)^{1/\gamma}$. Отсюда скорость звука $c = \sqrt{\gamma p/\rho} \approx 620$ м/с.

1.1.12. При интерференции двух плоских звуковых волн, излучаемых двумя одинаковыми закрытыми трубами длиной $l = 60$ см, вследствие различия температуры воздуха в них создается 1 биение в секунду. Температура воздуха в трубе, дающей более низкий тон, равна 16° С. Какова температура воздуха в другой трубе? Считать, что генерируется первая мода колебаний закрытой трубы, т. е. длина волны звука $\lambda = l/2$.

Ответ. $t_2 = 16{,}5^\circ$ С.

1.1.13. Записать решение волнового уравнения для плоской монохроматической волны. Найти соотношение между амплитудами давления и смещения, колебательной скорости и ускорения частиц.

Решение. Согласно формулам (1.12), (1.13) решение волнового уравнения для давления в гармонической волне можно записать в виде

$$p'(x,t) = p'_0 \cos(\omega t - kx),$$

где p'_0 — амплитуда давления, ω — частота, $k = \omega/c$ — волновое число. Из (1.14) следует, что колебательная скорость находится в фазе с давлением:

$$v(x,t) = v_0 \cos(\omega t - kx), \quad v_0 = p'_0/(\rho_0 c). \tag{1.24}$$

Величина $\rho_0 c$ носит название волнового сопротивления (импеданса) среды. Для амплитуд смещения частиц $\xi_0 = \int v dt$ и ускорения $\ddot{\xi}_0 = \partial v/\partial t$ имеем из (1.24)

$$\xi_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{p'_0}{\rho_0 c\omega}, \quad \ddot{\xi}_0 = \omega v_0 = \frac{p'_0\omega}{\rho_0 c}. \tag{1.25}$$

Часто используется эффективное среднеквадратичное давление $p_{эф}$, определяемое через среднее от квадрата звукового давления за один период волны $T = 2\pi/\omega$:

$$p^2_{эф} = \frac{1}{T}\int_0^T p^2 dt = \frac{p'^2_0}{2}, \quad \text{откуда} \quad p_{эф} = p'_0/\sqrt{2}\,. \tag{1.26}$$

1.1.14. Найти длину звуковой волны в воздухе на частоте 500 Гц при температуре $t = 15^\circ$ С и давлении $p_0 = 10^5$ Па (плотность воздуха $\rho_0 = 1{,}26$ кг/м^3).

Ответ. $\lambda = c/f = f^{-1}\sqrt{\gamma p_0/\rho_0} \approx 0{,}7$ м.

1.1.15. Смещение частиц в плоской бегущей в воздухе звуковой волне имеет вид $\xi = 5 \cdot 10^{-8} \sin(1980t - 6x)$ [м]. Найти: частоту колебаний; скорость распространения волны; длину волны; амплитуду скорости колебания каждой частицы; ускорение; амплитуду звукового давления, если распространение звука происходит адиабатически ($\rho_0 c = 420$ кг/(м^2·с)).

Ответ. Для данной волны угловая частота $\omega = 1980^{-1}$ с$^{-1}$, волновое число $k = 6$ м$^{-1}$, амплитуда смещения $\xi_0 = 5{\cdot}10^{-8}$ м. Следовательно, $f = \omega/2\pi = 315$ Гц, $c = \omega/k = 330$ м/с, $\lambda = 2\pi/k = 1$ м, $v_0 = \dot{\xi}_0 = \xi_0\omega = 9{,}9{\cdot}10^{-5}$ м/с, $\ddot{\xi}_0 = \omega^2\xi_0 = 0{,}2$ м/с^2, $p'_0 = v_0\rho_0 c = 0{,}04$ Па.

1.1.16. Плоская волна с амплитудой акустического давления 0,0002 дин/см^2 при 1000 Гц (порог слышимости) распространяется в воздухе. Найти значения амплитуды скорости и смещения частиц.

Решение. Из (1.25) имеем $v_0 = p_0'/(\rho_0 c)$, $\xi_0 = v_0/\omega$. Для воздуха $\rho_0 c = 42$ г/(см^2·с), и $v_0 = 4{,}8 \cdot 10^{-8}$ м/с, $\xi_0 = 7{,}6 \cdot 10^{-12}$ м.

1.1.17. Человек с хорошим слухом воспринимает звуковое давление с амплитудой $p_0' = 10^{-3}$ дин/см^2 при частоте 2000 Гц. Вычислить амплитуду смещения, скорости и ускорения частиц воздуха в такой волне. Решить ту же задачу при частоте 1000 Гц.

Ответ. На частоте 2000 Гц: $\xi_0 = v_0/(2\pi f) = p_0'/(2\pi f \rho_0 c) = 1{,}9 \cdot 10^{-9}$ см, $v_0 = \dot{\xi}_0 = p_0'/(\rho_0 c) = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ см/с, $\ddot{\xi}_0 = 2\pi f v_0 = 0{,}3$ см/с^2. На частоте 1000 Гц: $\xi_0 = 3{,}8 \cdot 10^{-9}$ см, $v_0 = \dot{\xi}_0 = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ см/с, $\ddot{\xi}_0 = 0{,}15$ см/с^2.

1.1.18. Сравнить колебательные скорости частиц в бегущей звуковой волне в воде и воздухе при одинаковом акустическом давлении (для воды $\rho_0 c = 1{,}5 \cdot 10^5$ г/(см^2·с), для воздуха $\rho_0 c = 42$ г/(см^2·с)).

Ответ. $v_{\text{возд}}/v_{\text{вода}} = (\rho_0 c)_{\text{вода}}/(\rho_0 c)_{\text{возд}} \approx 3600$.

1.1.19. Амплитуда колебательной скорости в плоской гармонической звуковой волне в воде равна $v_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ см/с. Вычислить амплитуды смещения и звукового давления на частоте 100 Гц. Как изменятся эти величины, если такую же колебательную скорость имеет волна в воздухе?

Ответ. Амплитуда смещения $\xi_0 = 8 \cdot 10^{-10}$ м; амплитуда давления: в воде $p_0' = 0{,}75$ Па, в воздухе $p_0' = 2{,}1 \cdot 10^{-4}$ Па.

1.1.20. Исходя из линеаризованных уравнений гидродинамики идеальной среды, вывести формулы для объемной плотности энергии и вектора плотности потока энергии звуковой волны.

Решение. Исходим из уравнений (1.4), (1.5). Заменяя приращение плотности приращением давления: $\rho' = p'/c^2$, получим

$$\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p'}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p' = 0. \tag{1.27}$$

Умножим первое из уравнений (1.27) на p', второе на $\mathbf{v}$. Складывая полученные соотношения, запишем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p'^2}{2\rho_0 c^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2}\right) + \operatorname{div}(p'\mathbf{v}) = 0. \tag{1.28}$$

Уравнение (1.28) имеет вид дифференциального закона сохранения

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0, \tag{1.29}$$

где E, $\mathbf{S}$ — квадратичные комбинации переменных, описывающих акустическое поле. Следовательно, объемная плотность энергии дается формулой

$$E = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = p'^2/(2\rho_0 c^2) + \rho_0 v^2/2, \tag{1.30}$$

а вектор плотности потока энергии (вектор Умова–Пойнтинга)

$$\mathbf{S} = p'\mathbf{v}.$$

Величина

$$J = |\mathbf{S}| = p'v$$

называется интенсивностью (силой) звука. Если проинтегрировать (1.29) по достаточно большому объему V среды, на границах σ которого движение исчезает, и воспользоваться теоремой Остроградского–Гаусса для преобразования объемного интеграла в поверхностный, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V E dV + \oint\limits_\sigma \mathbf{Sn} d\sigma = 0. \tag{1.31}$$

Интеграл по замкнутой поверхности σ равен нулю, поскольку мы условились, что эту поверхность волны не пересекают. При этом из формулы (1.31) следует

$$\int\limits_V E dV = const,$$

т. е. полная энергия в объеме V идеальной среды сохраняется.

1.1.21. Получить выражения для объемной плотности энергии и интенсивности плоской бегущей волны.

Решение. Пользуясь соотношением $p'/(\rho_0 c^2) = v/c$, приведем выражение (1.30) к виду

$$E = \rho_0 v^2 = p'^2/(\rho_0 c^2).$$

Интенсивность равна

$$J = p'v = cE = \rho_0 c v^2 = p'^2/(\rho_0 c).$$

В гармонической волне $p' = p'_0 \cos(\omega t - kx)$ средняя за период сила звука равна

$$\overline{J} = p_0'^2/(2\rho_0 c) = p_{\text{эф}}^2/(\rho_0 c), \quad \overline{J} = \rho_0 c v_0^2/2,$$

где $p_{\text{эф}}$ — эффективное среднеквадратичное давление (1.26). Используя комплексное представление поля гармонического во времени сигнала

$$p'(x,t) = \frac{1}{2}\Big(p'(x)e^{-i\omega t} + p'^*(x)e^{i\omega t}\Big),\ v(x,t) = \frac{1}{2}\Big(v(x)e^{-i\omega t} + v^*(x)e^{i\omega t}\Big),$$

получим еще одно полезное соотношение:

$$\overline{J} = \overline{p'v} = \frac{1}{4}(p'v^* + p'^*v) = \frac{1}{2}\Re(p'v^*),$$

которое используется во многих задачах.

1.1.22. Амплитуда звукового давления в плоской гармонической волне равна $p_0' = 2{\cdot}10^{-3}$ дин/см^2. Вычислить амплитуды колебательной скорости и смещения, средние интенсивность и плотность энергии волны в воздухе на частоте $f = 1$ кГц ($\rho_0 c = 42$ г/(см^2·с)).

Ответ. $v_0 = p_0'/(\rho_0 c) = 4{,}7{\cdot}10^{-7}$ м/с, $\xi_0 = v_0/(2\pi f) = 7{\cdot}10^{-11}$ м, $J = p_0'^2/(2\rho_0 c) = 4{,}8{\cdot}10^{-11}$ Вт/м^2, $E = J/c = 1{,}4{\cdot}10^{-13}$ Дж/м^3.

1.1.23. Интенсивность звука J равна 0,1 Вт/м^2. Вычислить объемную плотность энергии E, давление p_0', смещение ξ_0, скорость v_0 и ускорение $\ddot{\xi}_0$ частиц в плоской волне на частоте $f = 10$ кГц в воде и в воздухе. Скорость звука в воде 1500 м/с, в воздухе 340 м/с.

Ответ. Воспользуемся формулами $E = J/c$, $p_0' = \sqrt{2J\rho_0 c}$, $\xi_0 = p_0'/(2\pi f \rho_0 c)$, $v_0 = \dot{\xi}_0 = p_0'/(\rho_0 c)$, $\ddot{\xi}_0 = 2\pi f v_0$. Тогда получаем соответственно для этих величин в воде: $6{,}7{\cdot}10^{-5}$ Дж/м^3, $5{,}5{\cdot}10^2$ Па, $5{,}8{\cdot}10^{-9}$ м, $3{,}7{\cdot}10^{-4}$ м/с, 23 м/с^2; в воздухе: $3{\cdot}10^{-4}$ Дж/м^3, 9,2 Па, $3{,}5{\cdot}10^{-7}$ м, $2{,}2{\cdot}10^{-2}$ м/с, $1{,}4{\cdot}10^3$ м/с^2.

1.1.24. Плоская волна частотой 400 Гц распространяется в воздухе. Интенсивность волны $1{,}2{\cdot}10^{-2}$ Вт/м^2. Определить плотность энергии и амплитуду колебаний, если температура воздуха 27° С. Плотность воздуха ρ_0 при $t = 0°$ С равна 1,18 кг/м^3.

Решение. Плотность энергии $E = J/c$, J — интенсивность звука. Скорость звука $c \approx 20\sqrt{T_0}$ (см. (1.23)). Плотность воздуха при $t = 27°$ С находим по формуле $\rho = \rho_0(1 + 0{,}00367t)^{-1} \approx 1{,}07$ кг/м^3. Находим $c = 350$ м/с. Определяем скорость колебаний: $v_0 = \sqrt{2J/\rho c} = 8{\cdot}10^{-3}$ м/с. Амплитуда колебаний $\xi_0 = v_0/(2\pi f)$. Подставляя числовые значения, получаем для плотности энергии и амплитуды смещения частиц $E = 3{,}4{\cdot}10^{-5}$ Дж/м^3, $\xi_0 = 3{\cdot}10^{-6}$ м.

1.1.25. В плоской звуковой волне с частотой 1 кГц в воздухе экстремумы давления отличаются на 1 дин/см^2 от среднего атмосферного давления, равного 10 дин/см^2. Вычислить, чему равны: изменение плотности, сопровождающее распространение такой волны; интенсивность волны; максимальное смещение частиц. Скорость звука равна 340 м/с, $\rho_0 c = 420$ кг/(м^2·с).

Ответ. $\rho_0' = p_0'/c^2 = 8{,}7{\cdot}10^{-7}$ кг/м^3, $J = p_0'^2/(2\rho_0 c) = 1{,}2{\cdot}10^{-5}$ Вт/м^2, $\xi_0 = p_0'/(2\pi f \rho_0 c) = 3{,}8{\cdot}10^{-8}$ м.

1.1.26. В атмосферной акустике принято характеризовать уровень интенсивности $B = 10\lg(J/J_{\text{ст}})$ относительно стандартного нулевого уровня с интенсивностью $J_{\text{ст}} = 10^{-12}$ Вт/м^2. Чему равняется среднее звуковое давление $\overline{p}_{\text{ст}}$ в воздухе при нормальных условиях (атмосферное давление 1 атм, $t = 0°$ С) волны нулевого уровня ($c = 332$ м/с, $\rho_0 = 1{,}26$ кг/м^3)? Записать выражение для уровня звукового давления относительно стандартного давления $\overline{p}_{\text{ст}}$.

Решение. Для эффективного звукового давления получаем $\overline{p}_{\text{ст}} = \sqrt{J_{\text{ст}}\rho_0 c} \approx 2{,}04{\cdot}10^{-5}$ Па. Уровень звука при этом записывается как $B = 10\lg(J/J_{\text{ст}}) = 20\lg(p/\overline{p}_{\text{ст}})$.

1.1.27. Интенсивность звука равна $2\cdot10^{-4}$ Вт/м^2. Найти уровень интенсивности относительно стандартного нулевого уровня $J_{\text{ст}} = 10^{-12}$ Вт/м^2.

Ответ. $B = 10\lg(J/J_{\text{ст}}) = 83$ дБ.

1.1.28. Амплитуда звукового давления $p'_0 = 0{,}1$ Па. Найти уровень интенсивности в воздухе при температуре 20° С и давлении 1 атм.

Решение. Используя определения $B = 10\lg(J/J_{\text{ст}})$, $J = p_0'^2/(2\rho_0 c)$, $J_{\text{ст}} = 10^{-12}$ Вт/м^2 и подставляя значения $\rho_0 = 1{,}29$ кг/м^3 и $c = 340$ м/с при $t = 20°$ С, имеем $J = 1{,}14\cdot10^{-5}$ Вт/м^2. Следовательно, $B = 70{,}6$ дБ.

1.1.29. Уровень интенсивности плоской звуковой волны в воздухе равен 100 дБ по отношению к стандартному нулевому уровню интенсивности. Вычислить амплитуды скорости v_0 и ускорения $\ddot{\xi}$ частиц на частотах $f_1 = 500$ Гц и $f_2 = 5$ кГц.

Ответ. Интенсивность звука равна $J = 10^{-12+0{,}1B}$ Вт/м^2. Следовательно, на частоте $f_1 = 500$ Гц имеем $J = 10^{-2}$ Вт/м^2, $v_0 = \sqrt{2J/(\rho_0 c)} = 6{,}9\cdot10^{-3}$ м/с, $\ddot{\xi} = 2\pi f v_0 = 21$ м/с^2. Соответственно на частоте $f_2 = 5$ кГц $J = 10^{-2}$ Вт/м^2, $v_0 = 6{,}9\cdot10^{-3}$ м/с, $\ddot{\xi} = 210$ м/с^2.

1.1.30. Плоская волна, распространяющаяся в воздухе с частотой 1000 Гц, имеет амплитуду звукового давления $p'_0 = 2\cdot10^{-4}$ дин/см^2 (порог слышимости). Определить амплитуду смещения ξ_0 и амплитуду скорости v_0 частиц среды (в единицах СГС). Тот же расчет сделать для уровня интенсивности в 160 дБ над порогом слышимости.

Ответ. $v_0 = 4{,}8\cdot10^{-6}$ см/с, $\xi_0 = 7{,}6\cdot10^{-10}$ см. При увеличении уровня интенсивности на 160 дБ интенсивность возрастет в 10^{16} раз; давление, скорость и смещение частиц — в 10^8 раз.

1.1.31. В воздухе при температуре 27° С и нормальном атмосферном давлении распространяется звуковая волна, уровень интенсивности которой равен $B = 150$ дБ (сильный звук, вызывающий боль в ушах). Определить температуру в месте максимального давления и амплитуду ее колебаний. Как изменится эта величина, если мощность волны уменьшится в 10 раз?

Решение. Находим звуковое давление p', соответствующее данному уровню интенсивности: $B = 20\lg(p'/p_{\text{ст}})$, где $p_{\text{ст}}$ — стандартное нулевое давление при нормальных атмосферных условиях ($p_{\text{ст}} = 2{,}04\cdot10^{-4}$ дин/см$^2 = 2{,}04\cdot10^{-5}$ Па). Отсюда находим $p' = 645$ Па. Используем уравнение адиабаты для температуры: $T_2 = T_1(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$, $\gamma = 1{,}4$. Подставляя $p_1 = p_0 = 1{,}01\cdot10^5$ Па, $p_2 = p_0 + p'$ и учитывая, что $p' \ll p_0$, имеем $T_2 = T_1\,(1 + [(\gamma-1)/\gamma]p'/p_0)$, т. е. $\Delta T = T_1[(\gamma-1)/\gamma]p'/p_0$. Подставляя $T_1 = 300$ К, получаем $\Delta T = 0{,}55$ К. При уменьшении мощности волны в 10 раз (давления в 3,16 раза) $\Delta T = 0{,}17$ К.

1.1.32. Вычислить изменение температуры в звуковой волне, имеющей интенсивность $J = 0{,}01$ Вт/м^2, при температуре воздуха 20° С и атмосферном давлении.

Ответ. $\Delta T = T[(\gamma-1)/(\gamma p_0)]\sqrt{2J\rho_0 c} = 2{,}4\cdot10^{-3}$ К.

1.1.33. В гидроакустике уровень звукового давления принято отсчитывать относительно давления $\overline{p}_{\text{н}} = 1$ мкПа $= 10^{-6}$ Па, $B_{\text{н}} = 20\lg(p/\overline{p}_{\text{н}})$. Найти формулу пересчета от $B_{\text{н}}$ к стандартному уровню интенсивности $J_{\text{ст}} = 10^{-12}$ Вт/м^2, соответствующему в воде ($\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, $c = 1500$ м/с) эффективному давлению $\overline{p}_{\text{эф}}$.

Решение. Найдем значение стандартного нулевого уровня: $J_{\text{ст}} = \overline{p^2}_{\text{ст}}/(\rho_0 c)$. Отсюда $\overline{p}_{\text{ст}} \approx 1{,}22\cdot 10^{-3}$ Па. Следовательно, имеем $B_{\text{н}} = 20\lg(p/10^{-6})$, $B = 20\lg\big(p/(1{,}22\cdot 10^{-3})\big)$, из которых получаем $B_{\text{н}} = B + 61{,}72$.

1.1.34. Вычислить радиационное давление, оказываемое плоской звуковой волной на препятствие, если известно приращение давления в звуковой волне.

Решение. Уравнения гидродинамики идеальной сплошной среды, приведенные в задаче 1.1.1, можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = \mathbf{F}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}. \tag{1.32}$$

Сила $\mathbf{F}$, действующая на единицу объема среды, выражается через дивергенцию тензора

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k,$$

называемого тензором плотности потока импульса. Его физический смысл будет понятен, если проинтегрировать (1.32) по V и воспользоваться формулой Остроградского–Гаусса для преобразования интеграла от дивергенции в поверхностный интеграл:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho v_i dV = -\oint\limits_\sigma \Pi_{ik} n_k d\sigma. \tag{1.33}$$

Левая часть (1.33) описывает изменение i-й компоненты количества движения в объеме V. Поэтому выражение

$$\Pi_{ik} n_k = p n_i + \rho v_i v_k n_k$$

соответствует потоку i-й компоненты количества движения через единицу площади поверхности с единичным вектором внешней нормали $\mathbf{n}$.

В звуковом поле $p = p_0 + p'$ при гармоническом изменении p' во времени среднее за период звуковое давление $\overline{p'} = 0$. Поэтому в гармонической волне

$$\overline{\Pi}_{ik} = \rho_0 \overline{v_i v_k} = \rho_0 \overline{v}^2 m_i m_k = \overline{E} m_i m_k.$$

Здесь $E = p_0 \overline{v^2}$ — объемная плотность акустической энергии, усредненная по периоду, $\mathbf{m}$ — единичный вектор вдоль направления распространения волны. Если плоская волна бежит вдоль оси x, то отлична от нуля только компонента $\overline{\Pi}_{xx} = \overline{E} = p_0'^2/(2\rho_0 c^2)$, т. е. поток «иксовой» компоненты количества движения вдоль оси x.

Чтобы найти силу, действующую на препятствие, нужно решить задачу об отражении и прохождении волны через его границу. В простейшем случае, когда облучается плоская граница раздела, ортогональная оси x, слева от нее существуют падающая и отраженная волны с плотностями энергии $\overline{E}_{\text{пад}}$ и $\overline{E}_{\text{отр}}$, а справа — прошедшая волна $\overline{E}_{\text{пр}}$. Поэтому, как следует из формулы (1.33), на единицу площади поверхности действует сила

$$p = \overline{E}_{\text{пад}} + \overline{E}_{\text{отр}} - \overline{E}_{\text{пр}}.$$

Видно, что давление на стенку учитывает добавку, связанную с реакцией (отдачей) отраженной волны, и уменьшается на величину, связанную с прошедшей волной.

1.1.35. Уровень интенсивности звука составляет $B = 120$ дБ (громкий звук). Найти звуковое давление и мощность — поток энергии, попадающий за 1 с в ухо человека. Считать площадь уха равной 4 см^2 и ухо перпендикулярным направлению распространения волны ($\rho_0 = 1{,}29$ кг/м^3, $c = 340$ м/с).

Решение. Найдем интенсивность звука J. По определению $B = 10\lg(J/J_{\text{ст}})$, где $J_{\text{ст}} = 10^{-12}$ Вт/м^2 — стандартный нулевой уровень, и, следовательно, $J = 1$ Вт/м^2. Амплитуду давления находим из выражения $J = p_0'^2/(2\rho_0 c)$: $p_0' = 29$ Па; мощность $N = JS$, где $S = 4$ см^2, $N = 4{\cdot}10^{-4}$ Дж.

1.1.36. Какова полная мощность ненаправленного источника звука небольших размеров, если на расстоянии $r = 100$ м амплитуда давления в воздухе равняется 0,1 Па? Поглощением звука пренебречь.

Решение. Ненаправленный источник формирует сферически расходящуюся волну. Поэтому для полной мощности имеем $N = JS = (p_0'^2/2\rho_0 c){\cdot}4\pi r^2 = 1{,}5$ Вт.

1.1.37. Малый по размерам источник звука излучает в воздухе при атмосферном давлении и температуре 0° С волну частотой $f = 500$ Гц. Мощность источника $N = 5$ Вт. Каковы амплитуды смещения, колебательной скорости и ускорения частиц в звуковой волне на расстоянии $r = 10$ м от источника? Поглощением звука пренебречь. Вычислить эти величины также в воде. Параметры сред даны в задаче 1.1.18.

Решение. С учетом сферической расходимости для интенсивности имеем $J = N/(4\pi r^2) = v_0^2\rho_0 c/2 = \xi_0^2{\cdot}2\pi^2 f^2\rho_0 c$; следовательно, для смещения ξ_0, колебательной скорости $v_0 = \dot{\xi}_0$ и ускорения частиц получаем

$$\xi_0 = \frac{1}{rf}\sqrt{\frac{N}{(2\pi)^3\rho_0 c}}, \quad v_0 = \dot{\xi}_0 = 2\pi f\xi_0, \quad \ddot{\xi}_0 = 2\pi f\dot{\xi}_0.$$

В воздухе: $\xi_0 = 1{,}4{\cdot}10^{-6}$ м, $\dot{\xi}_0 = 4{\cdot}10^{-3}$ м/с, $\ddot{\xi}_0 = 14$ м/с^2; в воде: $\xi_0 = 2{,}3{\cdot}10^{-8}$ м, $\dot{\xi}_0 = 7{,}3{\cdot}10^{-5}$ м/с, $\ddot{\xi}_0 = 0{,}23$ м/с^2.

1.1.38. На рисунке 1.1 приведена диаграмма, показывающая свойства человеческого слуха. Кривые соответствуют субъективному восприятию звука одинаковой громкости, которая измеряется в фонах.

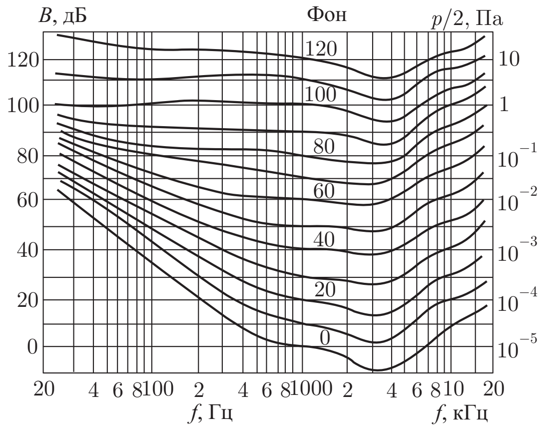

Рис. 1.1. К задаче 1.1.38.

Пользуясь диаграммой, определить: давление звука на нижней границе слуха (порог слышимости — 0 фон) и на верхней границе слуха (болевой порог — 120 фон) для частот 200 и 500 Гц; громкость звука при амплитуде давления 1 Па для частот 100 и 2000 Гц; громкость звука при мощности точечного источника звука 10 мВт (человеческая речь) при частоте 200 Гц на расстоянии 5 м; мощность источника звука при громкости 50 фон на расстоянии 10 м (частота 1000 Гц).

Решение. Руководствуемся кривыми, показывающими на диаграмме уровень громкости при различной частоте, а также шкалами давления и уровня интенсивности. Так, давление звука: на нижней границе слышимости на частоте 200 Гц равно около $2 \cdot 10^{-4}$ Па, на частоте 500 Гц — около $5 \cdot 10^{-5}$ Па.

Для нахождения численного значения громкости на расстоянии r от точечного источника требуется учесть сферическую расходимость акустической волны. При этом интенсивность J, измеренная на расстоянии r, для мощности N источника будет равна $J = N/(4\pi r^2)$.

§ 2. Затухание звука в жидкостях и газах, релаксационное поглощение

1.2.1. Записать волновое уравнение для акустической волны в вязкой теплопроводящей среде.

Решение. Исходными для решения задачи (в случае вязкой среды) являются линеаризованные уравнения гидродинамики для возмущений плотности ρ' и колебательной скорости $\mathbf{v}$: уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 \tag{2.1}$$

и уравнение Навье–Стокса

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho' - \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) \Delta \mathbf{v} = 0, \tag{2.2}$$

где η и ξ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости; c_0 — скорость звука. Из (2.1), (2.2) находим уравнение для колебательной скорости

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \mathbf{v} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{v} = 0, \quad b = \frac{4}{3}\eta + \xi. \tag{2.3}$$

Если волна распространяется вдоль оси x, уравнение (2.3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} = 0. \tag{2.4}$$

Можно показать, что в вязкой теплопроводящей среде уравнение для колебательной скорости по-прежнему будет иметь вид (2.3), (2.4), но с эффективным коэффициентом вязкости

$$b = \frac{4}{3}\eta + \xi + \varkappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right).$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, c_p, c_v — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме.

1.2.2. Вывести формулу для коэффициента затухания звука, обусловленного вязкостью и теплопроводностью среды.

Решение. Ищем решение волнового уравнения (2.4) в виде $v = v_0 e^{ikx - i\omega t}$. После подстановки в волновое уравнение получаем закон дисперсии $-\omega^2 + c_0^2 k^2 - (b/\rho_0) i\omega k^2 = 0$. Отсюда находим, что если $b\omega/(c_0^2 \rho_0) \ll 1$ (это соответствует малому затуханию звука на расстояниях порядка длины волны), то

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2 - ib\omega/\rho_0} \approx \frac{\omega^2}{c_0^2}\left(1 + i\frac{b\omega}{\rho_0 c_0^2}\right) \equiv (k_0 + i\beta)^2, \quad v = v_0 e^{-\beta x} e^{ik_0 x - i\omega t},$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0}, \quad \beta = \frac{b\omega^2}{2\rho_0 c_0^3} = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c_0^3}\left[\left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right]. \tag{2.5}$$

Величина β имеет размерность обратной длины и называется коэффициентом затухания звука. При оценке β по формуле (2.5) следует учесть, что очень часто можно пренебречь вторым членом ввиду малости коэффициента теплопроводности $\varkappa$ в жидкостях и газах. Коэффициент первой (сдвиговой) вязкости η характеризует касательное диссипативное напряжение, возникающее при скольжении слоев жидкости относительно друг друга. Коэффициент второй (объемной) вязкости ξ характеризует диссипацию, возникающую при всестороннем сжатии среды. В основе объемной вязкости обычно лежит какой-нибудь релаксационный процесс, влияющий на поглощение звука в ограниченной полосе частот в зависимости от характерных времен релаксации. Поэтому при вычислении коэффициента затухания вне областей релаксационного поглощения достаточно учитывать сдвиговую вязкость η. В СГС вязкость измеряется в пуазах: 1 Пз = 0,1 Па·с.

1.2.3. В гидроакустике принято характеризовать поглощение коэффициентом α, имеющим размерность дБ/м. Установить его связь с коэффициентом β, имеющим размерность непер/м.

Решение. Если задан коэффициент α [дБ/м], то интенсивность волны уменьшается с пройденным расстоянием r как

$$J = J_0 \cdot 10^{-0,1\alpha r}.$$

Соответственно

$$\alpha = -\frac{1}{r} \cdot 10 \lg \frac{J}{J_0}.$$

Поскольку $J \sim p'^2$, где p' — акустическое давление ($p' = p'_0 e^{-\beta r}$), то

$$J = J_0 e^{-2\beta r}, \quad \alpha = (20 \lg e)\beta \approx 8{,}7\beta. \tag{2.6}$$

1.2.4. Найти связь между коэффициентом поглощения плоской волны β и толщиной половинного поглощения $l_{1/2}$ (по интенсивности).

Ответ. $l_{1/2} = 0{,}35/\beta$.

1.2.5. Звуковая волна с уровнем интенсивности 130 дБ (по отношению к стандартному нулевому уровню $J_{\text{ст}} = 10^{-12}$ Вт/м^2) полностью поглощается при нормальном падении на плоский слой пористого вещества толщиной 5 см. Рассчитать, через какое время нагреется этот слой на 1° С, если его объемная теплоемкость $c_p = 0{,}2$ кал/(К·см^3)?

Ответ. Время, необходимое для нагрева слоя на 1° С, примерно равно 1 ч.

1.2.6. Интенсивность звука в плоской волне вследствие поглощения уменьшается в воздухе в несколько раз на расстоянии l_1. Определить расстояние l_2, на котором во столько же раз уменьшится интенсивность звука данной частоты в воде. Вязкость в воздухе $\eta = 0{,}19 \cdot 10^{-4}$ Па·с, в воде $\eta = 10^{-3}$ Па·с. Скорость звука и плотность равны 330 м/с, 1,3 кг/м^3 (для воздуха) и 1500 м/с, 1000 кг/м^3 (для воды).

Ответ. $l_2/l_1 = 1{,}3 \cdot 10^3$.

1.2.7. Найти в децибелах ослабление $G = 10 \lg(J_0/J)$ звука в воде на расстоянии 100 м, если вязкость воды равна $\eta = 10^{-3}$ Пз. Частота 20 кГц.

Решение. Используя выражение коэффициента затухания звука $\beta = \left[8\pi^2 f^2/(3\rho_0 c_0^3)\right] \eta$, найдем ослабление на расстоянии $r = 100$ м: $G = \beta r \cdot 20 \lg e \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3}$.

1.2.8. Найти в децибелах ослабление в воздухе плоской звуковой волны на участке пути длиной 100 м, если вязкость равна $\eta = 0{,}19{\cdot}10^{-4}$ Пз. Частота звука 20 кГц.

Ответ. $G = 3{,}7$ дБ.

1.2.9. Записать выражения для уровня акустических сферической и цилиндрической волн в слабопоглощающей среде.

Решение. В среде без поглощения, исходя из закона сохранения энергии для амплитуды, поле $p'(r)$ можно записать в следующем виде:

$$p' = p'_0 \cdot (r_0/r)^n,$$

где $n = 1/2$ для цилиндрической волны, $n = 1$ для сферической, p'_0 — давление при $r = r_0$. С учетом поглощения имеем

$$p' = p'_0 (r_0/r)^n e^{-\beta r}. \qquad (2.7)$$

Отсюда (см.(2.6)) $B = 20\lg(p'/p'_0) = 20\lg\big((r_0/r)^n e^{-\beta r}\big) = 20n\lg(r_0/r) - 20\beta r\lg e \equiv 20n\lg(r_0/r) - r\alpha$.

1.2.10. Вычислить в децибелах ослабление G в воде звуковой сферической волны при ее распространении на расстоянии от 2 до 10 км от источника звука. Коэффициент поглощения звука по давлению равен $8{\cdot}10^{-5}$ м$^{-1}$.

Ответ. $G = 19$ дБ.

1.2.11. Интенсивность звука в морской воде согласно эмпирической формуле убывает вследствие поглощения на величину $\alpha = 0{,}036 f^{3/2}$ [дБ/км], где f — частота в килогерцах. Определить, на каком расстоянии r от источника затухание уменьшит амплитуду волны в 100 раз при частотах 10 и 100 кГц.

Ответ. $r_{10\ \text{кГц}} = 35$ км; $r_{100\ \text{кГц}} = 1{,}1$ км.

1.2.12. Интенсивность звука на расстоянии 20 м от сферического источника звука равна $J_1 = 0{,}03$ эрг/(см^2·с). Какова интенсивность звука J_2 на расстоянии 100 м от источника, если коэффициент поглощения звука β равен $5{\cdot}10^{-5}$ см$^{-1}$?

Ответ. $J_2 = J_1 (r_1/r_2)^2 e^{-2\beta(r_2 - r_1)} = 5{,}4{\cdot}10^{-4}$ эрг/(см^2·с).

1.2.13. Найти переходное расстояние, на котором в сферической волне потери энергии на расхождение равны потерям на поглощение. Вычислить это расстояние в пресной воде при температуре 14° С на уровне моря, когда коэффициент вязкости равен $1{,}14{\cdot}10^{-3}$ Па·с. Частота звука 10 кГц.

Решение. Исходим из выражения для интенсивности затухающей сферической волны $J \sim r^{-2} e^{-2\beta r}$ (см.(2.7)). Относительное уменьшение интенсивности сферической волны вследствие ее расхождения на отрезке пути Δr равно

$$\left|\frac{\Delta J}{J}\right| = \frac{(2/r^3)\Delta r}{1/r^2} = \frac{2\Delta r}{r}.$$

Ослабление вследствие затухания звука на том же отрезке равно

$$\left|\frac{\Delta J}{J}\right| = \frac{2\beta e^{-2\beta r}\Delta r}{e^{-2\beta r}} = 2\beta\Delta r.$$

Приравнивая эти величины, находим $r' = 1/\beta$. Согласно (2.5), пренебрегая второй вязкостью и теплопроводностью, находим β по формуле $\beta = [8\pi^2 f^2/(3\rho_0 c_0^3)]\eta$, где коэффициент первой вязкости $\eta = 1{,}14\cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, $c_0 = 1460$ м/с. Следовательно, $\beta = 10^{-14} f^2 = 10^{-6}$ м$^{-1}$, $r' = 10^6$ м $= 1000$ км. При $r < r'$ потери энергии на расхождение пучка больше потерь на поглощение; при $r > r'$ преобладают потери на поглощение.

1.2.14. Цилиндрическая волна распространяется в воздухе. Вычислить коэффициент поглощения звука по давлению, если на дистанции от 1 км до 1,5 км от источника звука интенсивность звука уменьшается на 5 дБ.

Ответ. Используя (2.7), получаем $\beta = 7{,}5\cdot 10^{-4}$ м$^{-1}$ $(n = 1/2)$.

1.2.15. В средах с поглощением скорость звука иногда удобно считать комплексной величиной

$$c = c_0 e^{-i\delta} = c_0(\cos\delta - i\sin\delta),$$

где δ — угол потерь. Выразить коэффициент поглощения β через δ.

Решение. Потенциал скорости плоской волны в поглощающей среде

$$\varphi = A\,e^{-i\omega t + i\frac{\omega}{c}x} = A\,e^{-(\frac{\omega}{c_0}\sin\delta)\cdot x}\;e^{-i\omega t + i(\frac{\omega}{c_0}\cos\delta)\cdot x}. \tag{2.8}$$

Для коэффициента затухания получаем

$$\beta = (\omega/c_0)\sin\delta.$$

В случае слабо поглощающей среды $\beta \approx (\omega/c_0)\delta$.

1.2.16. Найти связь между углом потерь и текущим импедансом среды.

Решение. Текущий удельный акустический импеданс в среде с поглощением — число комплексное:

$$Z = p'/v = R - iX = |Z|\,e^{-i\sigma}, \quad \text{где} \quad \operatorname{tg}\sigma = X/R. \tag{2.9}$$

Вычислим давление и скорость с помощью выражения (2.8):

$$p' = -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} = i\rho_0\omega\varphi, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = i\frac{\omega}{c_0}(\cos\delta + i\sin\delta)\varphi.$$

Тогда

$$Z = \frac{\rho_0 c_0}{\cos\delta + i\sin\delta} = \rho_0 c_0\,e^{-i\delta}. \tag{2.10}$$

Сопоставляя (2.10) с (2.9), видим, что $\operatorname{tg}\delta = X/R$, а в слабо поглощающей среде $\delta = X/R$. Следовательно, тангенс угла потерь равен отношению мнимой части текущего импеданса к его действительной части. Заметим, что определение угла потерь в акустике не совпадет с определением этой величины в электротехнике.

1.2.17. Скорость звука в газе равна 351 м/с, угол потерь $\delta = 0{,}004°$. Найти коэффициент поглощения звука по энергии на частоте 100 кГц.

Ответ. $2\beta = (2\omega/c_0)\delta = 0{,}25$ м$^{-1}$.

1.2.18. Кислород при 20° С имеет следующие акустические характеристики: $\rho_0 = 1{,}33{\cdot}10^{-3}$ г/см^3, $c_0 = 1328$ м/с, коэффициент поглощения $\beta = 1{,}49{\cdot}10^{-13} f^2$ см$^{-1}$. Найти угол потерь и удельный комплексный импеданс среды при частоте $f = 1$ МГц.

Ответ. Угол потерь $\delta = \beta c_0/(2\pi f) = 0{,}002°$. Удельный комплексный импеданс среды $\rho_0 c = \rho_0 c_0(1 - i\delta) = 1766 \times$ $\times\, (1 - i{\cdot}0{,}00003)$ кг/(м$^2{\cdot}$с).

1.2.19. Вывести формулу для коэффициента поглощения, связанного с наличием в среде релаксационного процесса.

Решение. Примерами релаксационных процессов могут служить молекулярная диссоциация, обмен энергией между внутренними и поступательными движениями многоатомных молекул, фазовые переходы в среде. Распространение звука влияет на внутренние процессы, которые в свою очередь влияют на поглощение и скорость волны.

При наличии в среде релаксационного процесса связь между приращениями давления и плотности перестает быть алгебраической ($p' = c_0^2\rho'$); давление в момент времени t зависит от значений плотности в предшествующие моменты времени:

$$p' = c_0^2\rho' + mc_0^2 \int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right)\frac{\partial \rho'}{\partial t'}dt'. \tag{2.11}$$

Здесь τ — характерное время релаксации, m — число, смысл которого выяснен ниже (см. задачу 1.2.20). Уравнение (2.11) рассматриваем совместно с уравнениями гидродинамики идеальной среды (см. задачу 1.1.1). Исключая из этих уравнений переменную p' с помощью (2.11), получаем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0}\nabla\left(\rho' + m\int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right)\frac{\partial \rho'}{\partial t'}dt'\right) = 0. \tag{2.13}$$

Для приращения плотности ρ' уравнения (2.12), (2.13) сводятся к одному интегродифференциальному уравнению

$$\Delta\left(\rho' + m\int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right)\frac{\partial \rho'}{\partial t'}dt'\right) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0. \tag{2.14}$$

Ищем решение (2.14) в виде плоской гармонической волны, бегущей вдоль оси x: $\rho' = \rho_0' \, e^{-i\omega t + ikx}$. Получаем дисперсионное уравнение

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left[1 - m \frac{i\omega\tau}{1 - i\omega\tau} \right]^{-1}. \tag{2.15}$$

Число m обычно мало, поэтому из (2.15) приближенно следует

$$k = \pm \frac{\omega}{c_0} \left[1 - \frac{m}{2} \frac{m^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} + i \frac{m}{2} \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right]. \tag{2.16}$$

Мнимая часть (2.16) определяет коэффициент поглощения

$$\beta = \frac{m}{2c_0\tau} \frac{\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}. \tag{2.17}$$

1.2.20. Показать, что в области релаксационной дисперсии квадрат скорости звука выражается формулой

$$c^2 = c_0^2 \left(1 + \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{c_0^2} \frac{\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \right), \tag{2.18}$$

где c_0 — скорость звука при $\omega\tau \ll 1$, а c_∞ — скорость звука на высоких частотах ($\omega\tau \gg 1$).

Решение. Из (2.16) для скорости звука (с учетом $m \ll 1$) получаем выражение

$$c^2 = c_0^2 \left(1 + \frac{m\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \right), \tag{2.19}$$

откуда следует, что $c^2(\omega\tau \to 0) = c_0^2$, $c^2(\omega\tau \to \infty) = c_0^2(1 + m) \equiv c_\infty^2$. Находим значение $m = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_0^2$ и тем самым сводим формулу (2.19) к искомому виду (2.18).

1.2.21. Используя формулу для дисперсии скорости звука, обусловленной релаксационным процессом, найти область наиболее быстрого изменения скорости в зависимости от частоты.

Ответ. Область быстрого изменения скорости лежит в окрестности точки перегиба кривой $c^2(\omega\tau)$, описываемой формулой (2.18). Точка перегиба отвечает значению $\omega\tau = 1$.

1.2.22. Найти максимальное значение коэффициента релаксационного поглощения, происходящего на длине волны.

Решение. Коэффициент релаксационного поглощения описывается выражением (2.17):

$$\beta = \frac{\omega^2\tau}{2c_0} \frac{(c_\infty/c_0)^2 - 1}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad \beta\lambda \approx \pi\omega\tau \frac{(c_\infty/c_0)^2 - 1}{1 + (\omega\tau)^2}.$$

Полагая $d(\beta\lambda)/d(\omega\tau) = 0$, находим, что $\omega\tau = 1$ соответствует максимуму, и, следовательно,

$$(\beta\lambda)_{\max} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{c_\infty^2}{c_0^2} - 1\right) = \frac{\pi}{2}m. \tag{2.20}$$

1.2.23. Скорость звука в уксусной кислоте на частоте 250 кГц при температуре 20° С и атмосферном давлении равна 1194 м/с. При увеличении частоты до 3000 кГц относительная дисперсия скорости звука составляет около 1%. Найти максимальный безразмерный коэффициент релаксационного поглощения, отнесенный к длине волны.

Ответ. Используя формулу (2.20), находим $(\beta\lambda)_{\max} = 0{,}032$.

1.2.24. Вычислить коэффициент поглощения, обусловленный вязкостью и теплопроводностью на частоте 500 кГц, а также максимальный релаксационный коэффициент поглощения, отнесенный к длине волны, в углекислом газе, если его плотность $\rho_0 = 1{,}85$ кг/м^3, коэффициент сдвиговой вязкости $\eta = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $c_p/c_v = 1{,}3$, $c_p = 8{,}5 \cdot 10^2$ Дж/(кг·К), коэффициент теплопроводности $\varkappa = 1{,}63\eta c_v$. Скорость звука в углекислом газе при 20° С и атмосферном давлении на частоте около 100 кГц равна $c_0 = 268$ м/с, при увеличении частоты до 1000 кГц она возрастает на 4%.

Ответ. Коэффициент поглощения, обусловленный вязкостью и теплопроводностью, равен 3,3 м$^{-1}$. Безразмерный коэффициент поглощения на длине волны равен 0,128.

§ 3. Отражение и преломление звука

1.3.1. Используя условия на границе раздела двух жидких сред — равенство акустических давлений и нормальных компонент скорости по обе стороны от границы (см. рис. 1.2), получить формулы для коэффициентов отражения и «прозрачности» по давлению.

Решение. Опуская временной множитель $e^{-i\omega t}$, запишем потенциал звукового поля в падающей волне (среда 1):

$$\varphi_{\text{пад}} = A\,e^{ik_1(x\sin\vartheta_1 - z\cos\vartheta_1)}, \quad k_1 = \omega/c_1 \tag{3.1}$$

и в отраженной волне:

$$\varphi_{\text{отр}} = AVe^{ik_1(x\sin\vartheta_1 + z\cos\vartheta_1)}. \tag{3.2}$$

Здесь V — коэффициент отражения; c_1 и ρ_1 — соответственно скорость звука и плотность в среде 1. Потенциал поля в среде 1

$$\varphi_1 = \varphi_{\text{пад}} + \varphi_{\text{отр}}. \tag{3.3}$$

В среде 2

$$\varphi_2 = AWe^{ik_2(x\sin\vartheta_2 - z\cos\vartheta_2)}, \quad k_2 = \omega/c_2. \tag{3.4}$$

Здесь W — коэффициент прозрачности, c_2 и ρ_2 — соответственно скорость звука и плотность в среде 2.

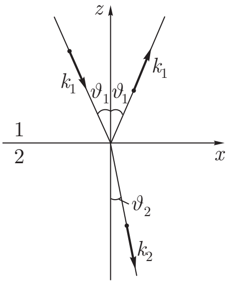

Рис. 1.2. К задаче 1.3.1.

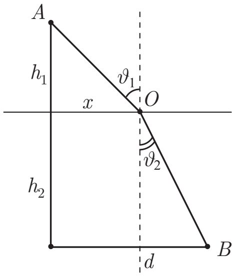

Рис. 1.3. К задаче 1.3.2.

Граничные условия при $z = 0$:
а) равенство давлений: $p_1 = p_2$, откуда (см. (1.9))

$$\rho_1\varphi_1 = \rho_2\varphi_2; \tag{3.5}$$

б) равенство нормальных скоростей: $v_{n1} = v_{n2}$ или

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}. \tag{3.6}$$

Из условия (3.5), учитывая (3.1)–(3.4), находим при $z = 0$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{1+V}{W} = e^{ix(k_2\sin\vartheta_2 - k_1\sin\vartheta_1)}. \tag{3.7}$$

Так как левая часть этого равенства не зависит от x, то из правой части получаем известный закон преломления — закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2} = n, \tag{3.8}$$

а затем из (3.7) — связь между коэффициентами отражения и прозрачности $W = (1+V)/m$, где $m = \rho_2/\rho_1$. Из (3.6) получаем при $z = 0$

$$(1-V)\cos\vartheta_1 = nW\cos\vartheta_2. \tag{3.9}$$

Из (3.7)–(3.9) выводим формулы для V и W (акустические формулы Френеля):

$$V = \frac{m\cos\vartheta_1 - n\cos\vartheta_2}{m\cos\vartheta_1 + n\cos\vartheta_2} = \frac{m\cos\vartheta_1 - \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}}{m\cos\vartheta_1 + \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}} =$$
$$= \frac{\rho_2 c_2/\cos\vartheta_2 - \rho_1 c_1/\cos\vartheta_1}{\rho_2 c_2/\cos\vartheta_2 + \rho_1 c_1/\cos\vartheta_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \tag{3.10}$$

где $Z_i = \rho_i c_i/\cos\vartheta_i$ — нормальный импеданс на границе;

$$W = \frac{2\cos\vartheta_1}{m\cos\vartheta_1 + n\cos\vartheta_2}. \tag{3.11}$$

Напомним, что V и W выражают коэффициенты отражения и прозрачности по потенциалу скорости. Так как $p' = -\rho\partial\varphi/\partial t$ (см. (1.9)), то соответствующие коэффициенты по давлению равны

$$V_p = V, \quad W_p = \frac{\rho_2}{\rho_1}W = \frac{2m\cos\vartheta_1}{m\cos\vartheta_1 + n\cos\vartheta_2}. \tag{3.12}$$

При нормальном падении волны ($\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$) получаем

$$V_p = \frac{m-n}{m+n}, \quad W_p = \frac{2m}{m+n}.$$

1.3.2. Источник расположен над поверхностью раздела в среде со скоростью звука c_1, а приемник — под поверхностью раздела в среде со скоростью звука c_2 (рис. 1.3). Источник и приемник разнесены на горизонтальное расстояние d. Показать, что время распространения сигнала вдоль луча, испытавшего преломление на поверхности раздела, минимально, если луч подчиняется закону Снеллиуса (3.8) — принцип Ферма.

Решение. Время распространения сигнала от точки A до точки B

$$t = \frac{AO}{c_1} + \frac{OB}{c_2} = \frac{1}{c_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}\,.$$

Минимальное значение t определится из соотношения

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0,$$

откуда

$$\frac{\sin\vartheta_1}{c_1} = \frac{\sin\vartheta_2}{c_2}.$$

1.3.3. Вывести формулы для коэффициентов отражения и прозрачности по колебательной скорости на плоской границе между жидкими средами в случае нормального падения волны. Сравнить их с соответствующими коэффициентами по давлению.

Решение. Запишем потенциал скорости в падающей, отраженной и прошедшей во вторую среду волнах при нормальном падении на границу:

$$\varphi_1 = A\,e^{-ik_1 z}, \quad \varphi_{\text{отр}} = AVe^{ik_1 z}, \quad \varphi_2 = AWe^{-ik_2 z},$$

где

$$V = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}, \quad W = \frac{2\rho_1 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}.$$

Коэффициент отражения по скорости равен

$$V_v = \left(\frac{v_{\text{отр}}}{v_1}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial\varphi_{\text{отр}}/\partial z}{\partial\varphi_1/\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = -V.$$

Коэффициент прохождения по скорости будет иметь вид

$$W_v = \left(\frac{\partial\varphi_2/\partial z}{\partial\varphi_1/\partial z}\right)_{z=0} = W\frac{k_2}{k_1} = W\frac{c_1}{c_2} = \frac{2\rho_1 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{c_1}{c_2}W.$$

1.3.4. Найти коэффициент прозрачности по интенсивности при нормальном падении плоской волны. Показать, что интенсивность прошедшей волны не зависит от ее направления падения.

Решение. Вычислим отношение интенсивности прошедшей через границу плоской волны к интенсивности падающей. При нормальном падении

$$W_J = \frac{Z_2 v_2^2}{Z_1 v_{\text{пад}}^2} = \frac{Z_2}{Z_1}(nW)^2, \quad W = \frac{2}{m+n}, \quad Z_i = \rho_i c_i, \quad n = \frac{c_1}{c_2}, \quad m = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

$$W_J = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}.$$

В эту формулу импедансы сред 1 и 2 входят симметрично, поэтому коэффициенты прохождения энергии из среды 1 в среду 2 и обратно одинаковы. Однако акустические давление и скорость при переходе через границу изменяются несимметрично: если $|V_p|_{12} < |V_p|_{21}$, то $|V_v|_{12} > |V_v|_{21}$, примером может служить переход звука через границу раздела воздух–вода и обратно из воды в воздух.

1.3.5. Исследовать формулу для коэффициентов отражения по интенсивности на границе двух сред в случаях, когда:

1) плотности обеих сред равны, а скорости звука различны;

2) плотности обеих сред различны, а скорости звука равны.

Ответ.

$$1)\ V_J = 1 - \left|\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}\right|^2 = \frac{2c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2}, \ 2)\ V_J = 1 - \frac{|\rho_2 - \rho_1|}{(\rho_2 + \rho_1)^2} = \frac{2\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}.$$

1.3.6. Найти коэффициент отражения по давлению и коэффициент передачи энергии при нормальном падении звука из воздуха в воду и из воды в воздух. Плотность воздуха $\rho_1 = 1{,}29$ кг/м^3, воды $\rho_2 = 10^3$ кг/м^3. Скорость звука соответственно $c_1 = 340$ м/с, $c_2 = 1480$ м/с. Как изменится коэффициент передачи при косом падении волны на границу раздела сред?

Решение. Коэффициент отражения звука, падающего из воздуха на поверхность воды, равен $V_p = (\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1)/(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1) = 0{,}9994$, т. е. давление на границе оказывается удвоенным по сравнению с давлением в падающей волне. Коэффициент отражения звука, падающего из воды в воздух, равен $V_p = -0{,}9994$, т. е. результирующее акустическое давление на границе с атмосферой меньше на $0{,}0006$ давления в падающей волне. Коэффициент передачи энергии

$$W_J = 1 - |V_p|^2 = 1 - \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}\right)^2 = 0{,}0012.$$

При косом падении волны на границу коэффициент передачи энергии уменьшится.

1.3.7. Плоская звуковая волна падает по нормали из воздуха на полупространство из углекислоты. Определить коэффициент отражения V_p на границе. Во сколько раз (q) отличается амплитуда прошедшей волны от амплитуды падающей? Определить отношение амплитуд (d) звукового давления в максимумах и минимумах акустического поля в воздухе. Для воздуха $c_1 = 3{,}4 \cdot 10^4$ см/с, $\rho_1 c_1 = 42$ г/(см^2·с); для углекислоты $c_2 = 2{,}6 \cdot 10^4$ см/с, $\rho_2 c_2 = 51$ г/(см^2·с).

Ответ. $V_p = \dfrac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = 0{,}1; \quad q = 1 - V_p = 0{,}9; \quad d = \dfrac{1 + V_p}{1 - V_p}.$

1.3.8. Ультразвуковой керамический преобразователь помещен в касторовое масло. Какая доля энергии акустической волны, распространяющейся в керамике, при этом передается маслу? Плотность керамики $\rho_1 = 8 \cdot 10^3$ кг/м^3; скорость звука в ней $c_1 = 6{,}2 \cdot 10^3$ м/с. Плотность масла $\rho_2 = 0{,}96 \cdot 10^3$ кг/м^3, скорость звука в нем $c_2 = 1{,}49 \cdot 10^3$ м/с. Считать для оценок, что задача сводится к нормальному падению плоской волны на границу.

Ответ. $W_J = 0{,}11$.

1.3.9. Решить задачу 1.3.8 для магнитострикционного никелевого преобразователя, работающего в воде. Плотность никеля $8{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, скорость звука в нем $5 \cdot 10^3$ м/с.

Ответ. $W_J = 0{,}12$.

1.3.10. Найти коэффициент прохождения по интенсивности W_J звука при нормальном падении: 1) на границу раздела воздушных масс с температурами 20 и 0° С; 2) на границу воздуха и водяного пара при 20° С. Для воздуха при $t = 0°$ С: $\rho = 1{,}29$ кг/м^3, $c = 331$ м/с; при $t = 20°$ С: $\rho = 1{,}20$ кг/м^3, $c = 343$ м/с. Для водяного пара $\rho = 0{,}58$ кг/м^3, $c = 405$ м/с.

Ответ. 1) $W_J = 0{,}999$; 2) $W_J = 0{,}93$.

1.3.11. Рассчитать и построить графики функции коэффициентов отражения и прозрачности (по давлению) в зависимости от угла падения для границы раздела вода–жидкий осадок, причем в воде $\rho_1 = 1$ г/см^3, $c_1 = 1{,}5 \cdot 10^3$ м/с; в осадке $\rho_2 = 1{,}4$ г/см^3, $c_2 = 1{,}48 \cdot 10^3$ м/с. Определить, при каком угле падения ϑ_1 коэффициент отражения равен нулю (угол полной прозрачности).

Решение. Нужно исходить из формулы для коэффициента отражения на границе двух жидких сред (см. (3.12)). Угол полной прозрачности определяется из условия $\cos\vartheta_1 = \sqrt{(n^2 - 1)/(m^2 - 1)}$.

1.3.12. Чему равны значения давления и нормальной компоненты скорости на границе абсолютно жесткой отражающей поверхности? Записать выражение для поля давления в полупространстве, из которого падает волна, если падающая волна имеет амплитуду p'_0, волновое число $k_1 = \omega/c_1$, и падает под углом ϑ_1 к нормали (см. задачу 1.3.1).

Ответ. Для абсолютно отражающей жесткой границы нормальная компонента скорости на границе равна нулю, а амплитуда давления равна удвоенной амплитуде давления падающей волны. Давление в точке (x, z) выражается формулой $p' = 2p'_0 e^{ik_1 x \sin\vartheta_1} \cos(k_1 z \cos\vartheta_1)$.

1.3.13. Записать выражение для давления в полупространстве, из которого падает волна на абсолютно мягкую отражающую поверхность. Чему равны значения давления и нормальной компоненты скорости на границе?

Ответ. Для абсолютно мягкой отражающей границы давление на границе равно нулю, а амплитуда скорости равна удвоенной амплитуде скорости падающей волны. Давление в точке (x, z) выражается формулой $p' = -2ip'_0 e^{ik_1 x \sin\vartheta_1} \sin(k_1 z \cos\vartheta_1)$.

1.3.14. Получить из формул Френеля (см. задачу 1.3.1) предельное значение коэффициента отражения по давлению при скользящем падении ($\vartheta_1 \to \pi/2$).

Ответ. При $c_1 \neq c_2$ и $\vartheta_1 \to \pi/2$ коэффициент отражения по давлению $V_p \to -1$.

1.3.15. Найти приближенное граничное условие для двух соприкасающихся жидких сред, считая, что $c_1 \gg c_2$.

Решение. Рассмотрим выражение для коэффициента отражения через нормальные импедансы сред на границе (см. (3.10)): $V = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$, где $Z_i = \rho_i c_i / \cos\vartheta_i$, $i = 1, 2$. Если $c_1 \gg c_2$, то независимо от угла падения ϑ_1 из закона Снеллиуса следует, что угол ϑ_2 мал, т. е. преломленная волна распространяется почти перпендикулярно границе. При этом $\cos\vartheta_2 \approx 1$ и $Z_2 \approx \rho_2 c_2$. Из граничных условий $p_1 = p_2$ и $v_{n1} = v_{n2}$ имеем

$$(p_1/v_{n1})_{z=0} = (p_2/v_{n2})_{z=0} = Z_2 \approx \rho_2 c_2.$$

Таким образом, характеристики акустического поля в среде 1 удается связать только через материальные константы среды 2:

$$(p_1/v_{n1})_{z=0} = \rho_2 c_2. \tag{3.13}$$

Граничное условие (3.13) удобно использовать для расчета поля в среде 1, не интересуясь волной в среде 2.

1.3.16. Вывести импедансное граничное условие (граничное условие «третьего рода»), которое связывает p_1 и $\partial p_1/\partial z$ при $z = 0$. Воспользоваться граничным условием (3.13).

Решение. Выразим v_{n1} и p_1 через акустический потенциал $\varphi_1 \sim e^{-i\omega t}$:

$$p_1 = -\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = i\omega\rho_1\varphi_1, \quad v_{n1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}. \tag{3.14}$$

С помощью (3.14) граничное условие (3.13) примет вид

$$\left(\frac{dp_1}{dz} - \frac{i\omega\rho_1}{Z_2}p_1\right)_{z=0} = 0.$$

1.3.17. Найти коэффициент отражения звука от пористой среды с узкими каналами, перпендикулярными отражающей поверхности.

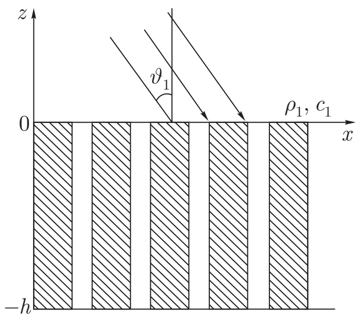

Рис. 1.4. К задаче 1.3.17.

Решение. Моделью такой поверхности служит гребенчатая структура, в которой ширина канавок мала по сравнению с длиной волны λ и глубиной h (рис. 1.4). Коэффициент отражения плоской волны от структуры согласно формулам Френеля

$$V = \frac{Z_2\cos\vartheta_1 - \rho_1 c_1}{Z_2\cos\vartheta_1 + \rho_1 c_1}, \tag{3.15}$$

где Z_2 — импеданс гребенчатой структуры. Найдем импеданс Z_2, пренебрегая потерями энергии на стенках из-за трения. Звуковое давление в трубках

$$p_2 = Ae^{-ikz} + Be^{ikz}.$$

Пусть на дне ($z = -h$) $v_n = 0$, т. е. $\partial p/\partial z = 0$,

$$(\partial p/\partial z)_{z=-h} = -Ae^{ikh} + Be^{-ikh} = 0,$$

отсюда $A = Be^{-2ikh}$. Тогда

$$p_2 = B(e^{-2ikh}e^{-ikz} + e^{ikz}), \quad \partial p_2/\partial z = -Bik(e^{-2ikh}e^{-ikz} + e^{ikz}).$$

На поверхности ($z = 0$)

$$p_2 = B(e^{-2ikh} + 1), \quad \partial p_2/\partial z = -Bik(e^{-2ikh} - 1).$$

Из импедансного граничного условия находим (см. задачу 1.3.16)

$$Z_2 = -i\omega\rho_1\left(\frac{p}{\partial p/\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{\omega\rho_1}{k}\frac{e^{-2ikh}+1}{-e^{-2ikh}+1} = \\ = -\rho_1 c_1 \frac{e^{ikh}+e^{-ikh}}{e^{ikh}-e^{-ikh}} = i\rho_1 c_1 \operatorname{ctg}(kh).$$

Коэффициент отражения от структуры равен по (3.15)

$$V = \frac{i\operatorname{ctg}(kh)\cos\vartheta_1 - 1}{i\operatorname{ctg}(kh)\cos\vartheta_1 + 1}.$$

1.3.18. Плоская звуковая волна падает в воздухе под углом $\vartheta_1 = 60^\circ$ на границу пористой среды с капиллярами, перпендикулярными отражающей границе с неподатливым дном. Ширина канавок мала по сравнению с их глубиной h и длиной волны. Вычислить коэффициент отражения звука от такой структуры на частоте 1000 Гц, если $h = 1$ см.

Ответ. $V = |V|e^{-i\sigma}$, $|V| = 1$, $\sigma = 0{,}72$.

1.3.19. Показать, что при полном внутреннем отражении и закритических углах падения амплитуда волны в отражающей среде убывает при удалении от границы среды по экспоненте.

Решение. Напишем для коэффициента отражения формулу Френеля (см. (3.10)):

$$V = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{k_2}{k_1}\frac{\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta_1}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{k_2}{k_1}\frac{\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta_1}\right)^{-1},$$

где $k_1 = \omega/c_1$, $k_2 = \omega/c_2$, ϑ_1 и ϑ_2 — углы, образованные лучом с нормалью к границе соответственно в средах 1 и 2; $c_2 > c_1$; ρ_1 и ρ_2 — плотности сред. Обозначим $a_1 = k_1 \cos\vartheta_1$. Из закона Снеллиуса следует, что при угле падения $\vartheta_1 = \arcsin(c_1/c_2)$, называемом критическим, $\vartheta_2 = 90^\circ$, т. е. отраженный луч направлен вдоль отражающей границы. При полном внутреннем отражении $\sin\vartheta_2 = (c_2/c_1)\sin\vartheta_1$. Это указывает на то, что величина $\sin\vartheta_2$ должна рассматриваться как мнимая. Число $a_2 = k_2\cos\vartheta_2 = i\alpha$ также мнимое. Коэффициент отражения

$$V = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - i\frac{\alpha}{a_1}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + i\frac{\alpha}{a_1}\right)^{-1} = e^{-i\sigma}, \quad \text{где} \quad \mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2} = \frac{\alpha}{a_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad |V| = 1.$$

Коэффициент прозрачности также будет мнимым числом. По формуле Френеля

$$W = 2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{k_2}{k_1}\frac{\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta_1}\right)^{-1} = 2\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2\right]^{-1/2} e^{-i\sigma/2}.$$

Потенциал поля в среде 2 равен

$$\varphi_2 = 2A\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2\right]^{-1/2} e^{ik_1 x\sin\vartheta_1 + \alpha z - i\sigma/2},$$

A — амплитуда падающей на границу волны. Амплитуда поля убывает при удалении от границы по закону

$$|A_2| = 2Ae^{\alpha z}\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2\right]^{-1/2}, \quad \alpha > 0, \quad z < 0.$$

1.3.20. Показать, что полное отражение от поглощающей среды невозможно.

Решение. Если отражающая среда поглощающая, то скорость звука и коэффициент преломления в ней являются комплексными величинами. Поэтому в формуле Френеля для коэффициента отражения

$$V = \frac{m\cos\vartheta_1 - \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}}{m\cos\vartheta_1 + \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}}, \quad m = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

положим $\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1} = a + ib$. Тогда

$$V = \frac{(m\cos\vartheta_1 - a) - ib}{(m\cos\vartheta_1 + a) + ib} = |V|\,e^{-i\sigma},$$

причем при всех углах падения $|V| \neq 1$ (кроме скользящего падения: $\vartheta_1 = 90°$).

1.3.21. Вычислить угол полного отражения звука частотой 100 кГц на границе между водой и анилином. Определить фазу коэффициента отражения и глубину проникновения звука в анилин, на которой при угле падения 80° звуковое давление уменьшается в e раз. Поглощением звука в средах пренебречь. Плотности воды и анилина соответственно равны $\rho_1 = 1$ и $\rho_2 = 1{,}022$ г/см^3, скорости звука $c_1 = 1480$ и $c_2 = 1659$ м/с.

Решение. Угол полного внутреннего отражения равен $\vartheta_1 = \arcsin(c_1/c_2) = 61°$. Коэффициент отражения при этом $V = e^{-i\sigma}$, где $\operatorname{tg}(\sigma/2) = (\alpha/a_1)(\rho_1/\rho_2)$, $a_1 = (\omega/c_1)\cos\vartheta_1$. Вычислим мнимый косинус угла преломления ϑ_2 в среде 2 при угле падения $\vartheta_1 = 80°$:

$$\cos^2\vartheta_2 = 1 - \sin^2\vartheta_2 = 1 - (c_2/c_1)^2\sin^2\vartheta_1 < 0, \quad \cos\vartheta_2 = i\beta.$$

Рассмотрим величину $a_2 = (\omega/c_2)\cos\vartheta_2 = i\alpha = i{\cdot}1{,}8$ см$^{-1}$. Фаза коэффициента $\sigma = 2{,}33$. Глубину d, на которой в анилине давление убывает в e раз, находим из $\alpha d = 1$: $d = 0{,}57$ см.

1.3.22. Вывести асимптотическую формулу для коэффициента отражения от слабо поглощающей среды при малых углах скольжения.

Решение. Заменим в формуле (3.10) угол падения ϑ_1 на угол скольжения χ. Тогда

$$V = \frac{m\sin\chi - \sqrt{n^2 - \cos^2\chi}}{m\sin\chi + \sqrt{n^2 - \cos^2\chi}},$$

где $m = \rho_2/\rho_1$, $n = c_1/c_2$. Полагая для малых углов $\cos^2\chi = 1$ и $\sin\chi \approx \chi$, получим

$$V_p = \frac{m\chi(n^2 - 1)^{-1/2} - 1}{m\chi(n^2 - 1)^{-1/2} + 1} = \frac{\alpha\chi - 1}{\alpha\chi + 1},$$